

Weryfikacja hipotez statystycznych – testy t Studenta



JERZY STEFANOWSKI
Marek Kubiak

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska

Standardowy schemat postępowania (znane σ)

- Założenia: X ma rozkład normalny (lub zbliżony do normalnego), liczebność próby n jest wystarczająca.
 \bar{X} ma rozkład $N(\mu_0, \sigma_{\bar{X}})$

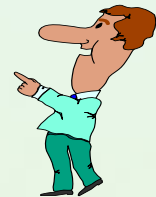
- **Krok 1:** Określenie hipotez:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \quad \text{lub} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

- **Krok 2:** Identyfikacja statystyki testu i obliczenie jej wartości w oparciu o dane z próby.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Krok 3:** Wybór poziomu istotności α .
- **Krok 4:** określenie obszarów krytycznych i zasad odrzucenia hipotezy H_0 , np. $Z \leq -z_\alpha$
- **Krok 5:** Podjęcie decyzji.




Weryfikacja hipotez dla przypadku nieznanego σ

- Co robić, gdy σ w populacji jest nieznanne?

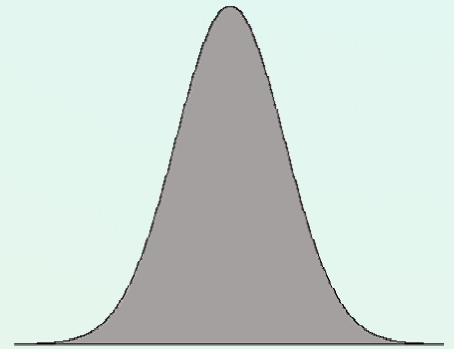
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$$

- Odchylenie standardowe (S) z próby stanowi dobry estymator σ ,


$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Rozkłady statystyki testowej

- Czy nowo wyliczoną statystykę należy porównywać z tablicami rozkładu normalnego?
- Nie zawsze!
- Statystyka ma rozkład normalny tylko dla dużych prób!



Karl Gauss, 1777-1855
niemiecki matematyk

Rozkład statystyki testowej

- Dla mniejszych prób ($n < 30$) rozkład jest inny.
- Stosuje się rodzinę rozkładów nazywanych rozkładami t - Studenta

William Gosset

Born: 1876 in Canterbury; Died: 1937 in Beaconsfield, England

**Obtained a post as a chemist in the Guinness brewery in Dublin in 1899.
Invented the t-test to handle small samples for quality control in brewing.
Wrote under the name "Student".**




Rozkład t - Studenta

- Jest rozkładem symetrycznym względem $x = 0$, a jego kształt jest zbliżony do rozkładu normalnego standaryzowanego, lecz jest nieco bardziej spłaszczony.

Wartość oczekiwana: $E(T)=0$

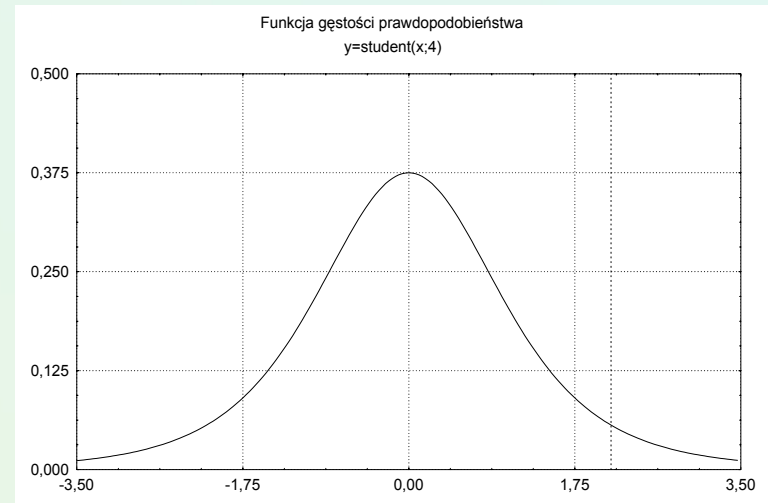
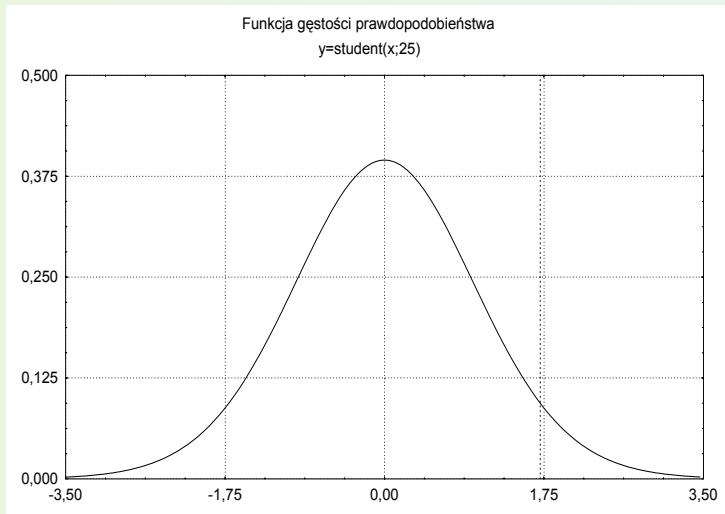
Wariancja: $D^2(T) = \frac{k}{k-2}$



Jest to rodzina rozkładów, które zależą od liczby stopni swobody k .

Rozkłady t - Studenta

- Różne liczby stopni swobody



Tablice rozkładu t - Studenta

- Co się znajduje w tablicach rozkładu?

Stopnie swobody (ang. degrees of freedom)

- Miara stopnia w jakim wartości w zbiorze danych mogą się zmieniać spełniając jednocześnie warunki, które są nałożone na ten zbiór.
- Jak używać tablic rozkładu?



Schemat postępowania (nieznane σ)

- **Krok 1:** Sprawdź założenia: czy zmienna X ma rozkład normalny (lub zbliżony do normalnego)?
 - Jeśli NIE i ponadto liczebność próby n jest wystarczająca, to nie powinno się przeprowadzać testu (spróbuj powiększyć próbę).
 - \bar{X} ma rozkład normalny.

- **Krok 2:** Określenie hipotez:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \text{ lub } H_1 : \mu > \mu_0$$

- **Krok 3:** Sprawdzianem testu są statystyki.

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} : N(\mu_0, S_{\bar{X}}) \text{ lub } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}} \text{ o rozkładzie } t - \text{Studenta} \\ \text{z } n - 1 \text{ stopniami swobody}$$

$$\text{gdzie } S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ lub } S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

- **Krok 4:** Wybór poziomu istotności α .

Schemat postępowania (nieznane σ) \rightarrow 2

- Czy liczebność próby $n > 30$?

Jeśli TAK to postępujemy standardowo stosując statystykę Z ;

Jeśli NIE to stosujemy statystykę t .

- **Test jednostronny:**

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu < \mu_0 \quad \text{lub} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

- H_0 odrzucamy, jeśli $T \leq -t_\alpha$ lub $T \geq t_\alpha$

- **Test dwustronny:**

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Hipotezę H_0 odrzucamy, jeśli

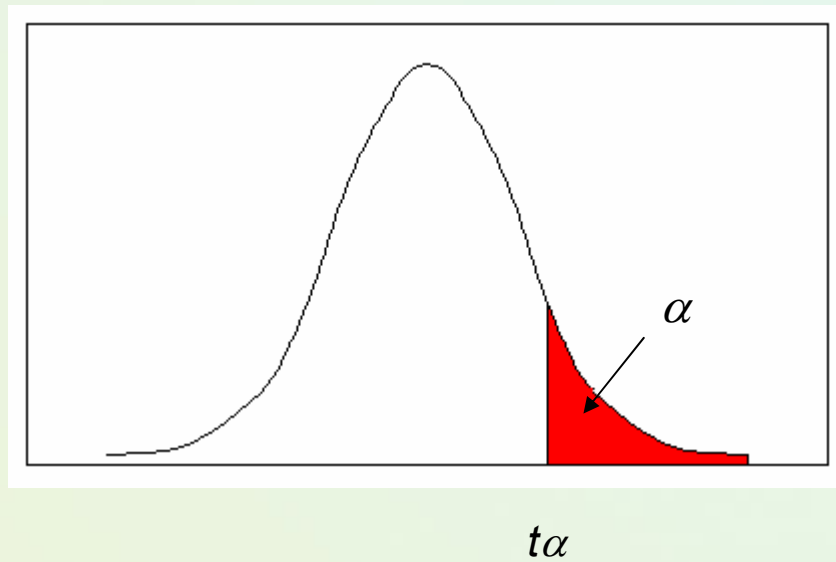
$$T \leq -t_{\alpha/2} \quad \text{lub} \quad T \geq t_{\alpha/2}$$



Obszary krytyczne

Test jednostronny (prawostronny)

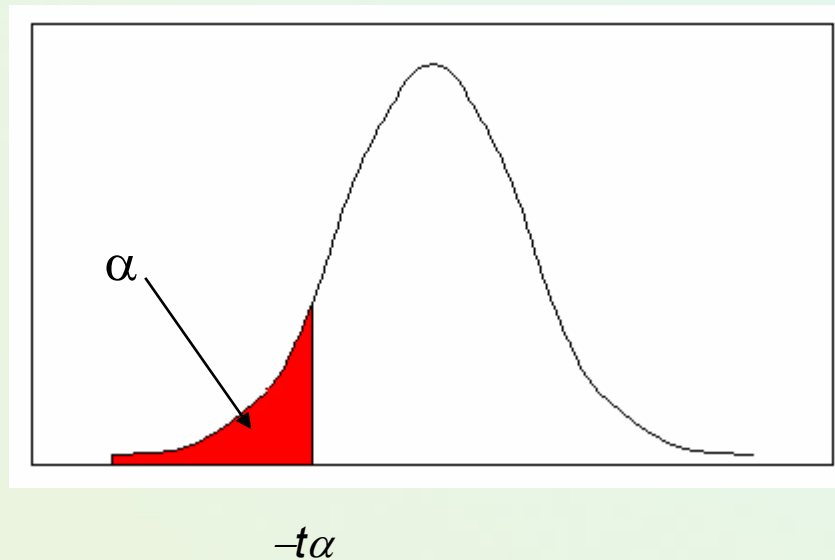
- $H_1 : \mu < \mu_0$
- H_0 odrzucamy, gdy $p \leq \alpha$ ($T \geq t_\alpha$)



Obszary krytyczne

Test jednostronny (lewostronny)

- $H_1 : \mu < \mu_0$
- H_0 odrzucamy, gdy $p \leq \alpha$ ($T \leq -t_\alpha$)

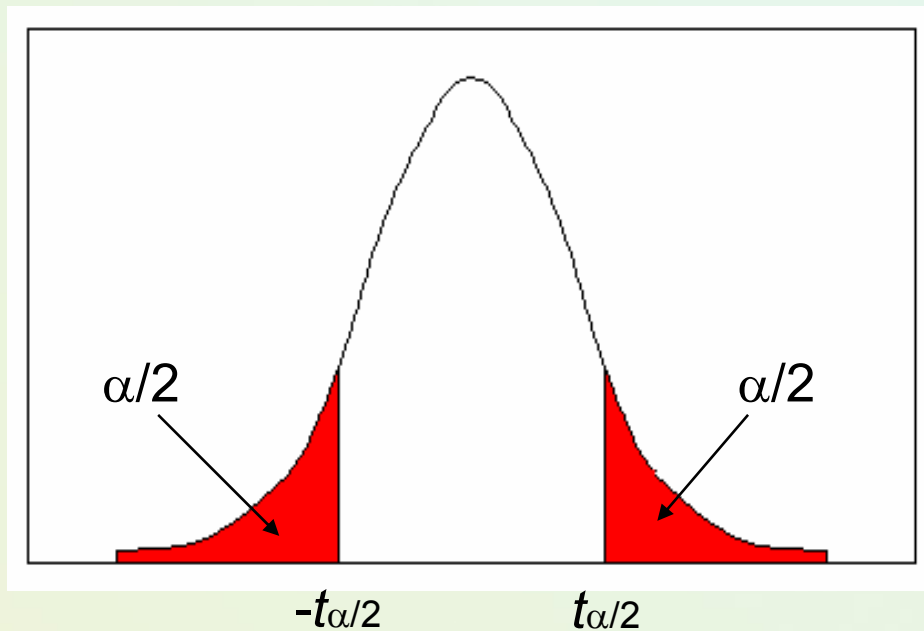


Dwustronny obszar odrzucenia !

Test dwustronny

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- H_0 odrzucamy gdy $2p \leq \alpha$!

tzn. $T \leq -t_{\alpha/2}$ lub $T \geq t_{\alpha/2}$



Zadania

➤ A teraz trochę popiszemy i policzymy!



Literatura

- Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, Koronacki Jacek, Mielniczuk Jan, WNT, 2001.
- Statystyka. Wprowadzenie do analizy danych sondażowych i eksperymentalnych. G.Wieczorkowska, Scholar, 2004.
- Przystępny kurs statystyki, Stanisław A., 1997.
- Po prostu statystyka, Clegg F., 1994.
- Statystyczna analiza wyników badań, Dobosz M., 2001.
- I wiele innych ...



Dziękuję za uwagę

Czytaj także podręczniki!