# Weryfikacja hipotez statystycznych

JERZY STEFANOWSKI

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska

## Plan wykładu

1. Metody wnioskowania statystycznego vs. metody opisu
2. Testowanie hipotez statystycznych
3. Standardowy schemat postępowania
4. Formułowanie hipotez
5. Przykład dydaktyczny
6. Przebieg typowego testu dla wartości średniej i jednej zbiorowości (rozkład normalny ze znaną wariancją)
7. Ryzyko popełniania błędu
8. Podsumowanie

## 1. Wnioskowanie a opis statystyczny

- Obserwacja statystyczna (dane):
  - pełne (zbiorowość generalna),
  - częściowe (próba → losowy dobór części jednostek ze zbiorowości).
- Na podstawie analizy próby chcemy wnioskować o całej zbiorowości!

Przykład:

- Analiza rozkładu dochodów świeżo wykształconych informatyków w Polsce.

## Wnioskowanie statystyczne

- Wnioskowanie statystyczne opiera się na rachunku prawdopodobieństwa, a reguły tego wnioskowania są określone przez metody statystyki indukcyjnej.
- Główne działy wnioskowania statystycznego:
  - Estymacja (szacowanie nieznanych parametrów zbiorowości generalnej),
  - Weryfikacja (sprawdzanie) hipotez statystycznych.
- Pamiętaj, że decyzje podejmowane są w warunkach niepewności!
- Reprezentatywność próby losowej:
  - Przyjęcie założeń co do odpowiednich schematów losowania,
  - Określenia właściwej liczebności i struktury próby,
  - Wyznaczenia dopuszczalnych prawdopodobieństw popełniania błędów.

## Opis a wnioskowanie statystyczne

<table>
<tr><td>Metody</td><td colspan="2">Opisu statystycznego 1</td><td colspan="2">Wnioskowania statystycznego 2</td></tr>
<tr><td>Analizy struktury zjawisk</td><td rowspan="3">Rozkłady empiryczne</td><td rowspan="2">Charakterystyki opisowe</td><td rowspan="3">Rozkłady teoretyczne</td><td rowspan="2">Estymacja parametrów</td></tr>
<tr><td>Analiza współzależności</td></tr>
<tr><td>Analiza dynamiki zjawisk</td><td>Grafika rozkładów</td><td>Weryfikacja (testowanie) hipotez</td></tr>
</table>

1. Bez uogólniania na zbiorowość
2. Na określonym poziomie istotności

## Przykłady badań statystycznych prowadzonych w Polsce przy zastosowaniu metod reprezentacyjnych:

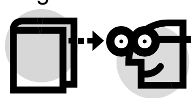
- W latach powojennych przeprowadzono w Polsce jednorazowe, reprezentacyjne badanie losowo dobranej próby mieszkańców na potrzeby przemysłu (odzieżowego, obuwniczego, itp..) wzorcowych typów budowy fizycznej człowieka.
- Cel → uzyskanie informacji liczbowej o pewnych cechach antropometrycznych ludności wg. różnych kategorii (wiek, płeć).
- Czy takie badania można było prowadzić dla wszystkich Polaków?

Więcej w A.Luszniewicz „Metody wnioskowania statystycznego”.

## Wnioskowanie statystyczne – wybrane przykłady:

- Badania marketingowe,
- Badanie jakości partii towarów,
- Ocena jakości technologicznej produkcji,
- Badania skuteczności leków, nowych metod szkolenia, organizacji pracy,
- Badanie zależności między zmiennymi,
- …

Więcej, np. A.Luszniewicz „Metody wnioskowania statystycznego”.



## 2. Weryfikacja hipotez statystycznych

- W estymacji → ocena wybranego parametru populacji.
- Obecnie → sprawdzenie pewnej hipotezy nt. poziomu nie znanego parametru albo co do postaci rozkładu zmiennej w populacji.
- Na podstawie informacji pochodzącej z próby będziemy podejmować decyzje czy przyjąć albo odrzucić hipotezę.
- Przykłady problemów badawczych dotyczących:
  - wartości badanych zmiennych,
    - np. średni wiek osób chorujących na pewną chorobę wynosi 45 lat.
  - porównania dwóch zbiorowości,
  - skuteczność oddziaływania pewnych bodźców, którym poddawane są te same grupy obiektów,
  - zależności między badanymi zmiennymi,
  - porównania rozkładów zmiennych.

## Standardowy schemat postępowania

- **Krok 1**: Określenie hipotezy zerowej $H_0$ i hipotezy alternatywnej $H_1$.
- **Krok 2**: Identyfikacja statystyki testu i obliczenie jej wartości w oparciu o dane z próby.
- **Krok 3**: Wybór poziomu istotności $\alpha$.
- **Krok 4**: Sformułowanie reguły decyzyjnej: określenie obszarów krytycznych i zasad odrzucenia hipotezy $H_0$.
- **Krok 5**: Podjęcie decyzji.

## „Alfabet pojęć” w testowaniu hipotez:

- Hipoteza statystyczna.
- Hipoteza zerowa $H_0$ i alternatywna $H_1$.
- Test jednostronny i dwustronny.
- Statystyka testowa.
- Prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej.
- Obszary krytyczne rozkładu zmiennej.
- Błąd pierwszego rodzaju.
- Błąd drugiego rodzaju.
- Poziom istotności.
- Moc testu.

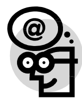
## Hipotezy statystyczne

Przykład technologiczny (J.Koronacki str. 213)

- Dla stosowanej technologii produkcji stopu $\rightarrow$ średni poziom zanieczyszczeń $\mu$ promili.
- Czy wprowadzona nowa technologia obniży poziom zanieczyszczeń?

Powyższe stwierdzenia to hipotezy badawcze.

- Hipoteza badawcza wyrażona w j. naturalnym a hipoteza statystyczna.



## Hipotezy statystyczne

- Hipotezą statystyczną nazywamy każde założenie dotyczące parametrów lub postaci funkcyjnej rozkładu prawdopodobieństwa dla określonej populacji

Kendall, Buckland: Słownik terminów statystycznych.

- Hipotezy parametryczne i nieparametryczne.
- Testowanie hipotez
$\rightarrow$ wykorzystuje się parę dwóch hipotez; pierwsza, tzw. zerowa $H_0$ podlega weryfikacji i może być odrzucona na korzyść drugiej hipotezy $H_1$, nazywanej alternatywną.

## Przykład dydaktyczny

- Dokładne toczenie tłoka pompy paliwa silnika samochodowego ma dawać średnicę pewnej części tłoka równą 7,5 mm.
  - Pożądana wartość średnia tych średnic $\theta_0$ = 7,5mm.
- Problem badawczy – sprawdzenie, czy zużycie noża tokarki nie spowodowało zwiększenia wartości średniej $\theta$ badanych średnic tłoka.

<u>Testowanie hipotez</u>:

Hipoteza zerowa $H0$ : $\theta = \theta_0$
Hipoteza alternatywna $H1$ : $\theta > \theta_0$

Komentarz: W literaturze wartość oczekiwana ozn. $\mu_0$

## Co z tymi hipotezami?

- Hipotezy zerowa i alternatywna muszą się wykluczać.

Lecz

- Czy obu hipotezom przypisujemy taką samą wagę?
- Czy można je traktować „symetrycznie”?

- Dlaczego poddajemy hipotezę zerową w wątpliwość i chcemy ją odrzucić?

## Zasady konstruowania hipotez i postępowania w ich weryfikacji

- Podobieństwo do reguły dowodzenia NIE WPROST (z łac. *ad absurdum*).
  - Aby pokazać, że prawdziwe jest twierdzenie (nazywane je hipotezą $H_1$) tworzymy jego negację (nazwijmy je $H_0$).
  - Zakładamy, że $H_0$ jest prawdziwe i sprawdzamy do jakich konsekwencji prowadzi przyjęcie tego założenia.
  - Jeśli wyniki są niezgodne (sprzeczne) z oczekiwaniami, to jest to dowodem na to, że przyjęte założenie jest fałszywe.
- Przykład badania inteligencji Piotra.

## Wnioskowanie dedukcyjne a statystyczne

| Wnioskowanie dedukcyjne | Wnioskowanie statystyczne |
|---|---|
| Formułujemy twierdzenie/hipotezę $H_1$, którą chcemy udowodnić | |
| Formułujemy negację $H_1$ w formie $H_0$ | |
| Zakładamy, że $H_0$ jest prawdziwe i sprawdzamy do jakich konsekwencji prowadzi przyjęcie tego założenia. | |
| Jeśli konsekwencje przyjęcia założenia prowadzą do absurdu, odrzucamy założenie o prawdziwości $H_0$ i uznajemy prawdziwość $H_1$ za udowodnioną. | Jeśli konsekwencje przyjęcia założenia prowadzą do otrzymania **MAŁO PRAWDOPODOBNEGO WYNIKU**, odrzucamy założenie o prawdziwości $H_0$. |

Uwaga: we wnioskowaniu statystycznym nie ma konsekwencji niemożliwych, a jedynie **mniej lub bardziej prawdopodobne**!

## Hipotezy kierunkowe

- Sposoby formułowania hipotezy alternatywnej w zależności od przewidywań badacza.
- Rozważmy przykład badania zachowania grupy studentów w sprawdzianie psychologicznym w stosunku do typowych wyników (w populacji).
- $H_0$ : $\mu = 5$ (typowy/średni wynik w populacji)
- $H_1$ może być sformułowana na trzy sposoby:

  $H_1$ : $\mu > 5$ (przypuszczamy, że są lepsi niż średnia w ...)

  $H_1$ : $\mu < 5$ (przypuszczamy, że są gorsi niż średnia)

  $H_1$ : $\mu \neq 5$ (osiągają wynik różny od średniego w populacji, nie przewidujemy kierunku różnicy)

## Ćwiczenie z formułowania hipotez

- Sprawdź czy jedynacy różnią się od populacji pod względem inteligencji (IQ=100).
- Sformułowania hipotezy:

  Hipoteza zerowa $H_0$ : $\mu(\text{IQ}) = 100$

  Hipoteza alternatywna $H_1$ : $\mu(\text{IQ}) \neq 100$

- Sprawdź czy himalaiści mają podwyższony poziom hemoglobiny w stosunku do populacji ($\mu = 14$).

- Inne ciekawe ćwiczenia patrz np., G.Wieczorkowska: *Statystyka - wprowadzenie do analizy danych sondażowych i eksperymentalnych*.

## Testowanie hipotez dla jednej zbiorowości (rozkład normalny ze znaną wariancją)

Powróćmy do przykładu badania średnic części tłoków

$H_0 : \theta = \theta_0$ , gdzie $\theta_0$=7,5 mm.

$H_1 : \theta > \theta_0$

- Założenia: średnice części tłoków mają rozkład normalny, odchylenie standardowe jest znane i wynosi 0,05 mm.
- Wartością średnia jest nieznana liczba $\theta$.
- Przeprowadzono badanie pomiarów odpowiedniej średnic z losowo wybranych 50 tłoków.
- Dysponujemy realizacją próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ z rozkładu $N(\theta, 0.05)$.

## Testowanie hipotez cd.

- Należy wybrać statystykę testową.
- Następnie wyliczyć jej wartość na podstawie próby i ocenić, czy jej wartość jest „typowa” lub „nietypowa” / mało prawdopodobna przy założeniu zachodzenia hipotezy $H_0$.
- Jeśli wartość jest MAŁO PRAWDOPODOBNA, to są podstawy do odrzucenia $H_0$.

## Przykład średnic tłoków – c.d.

- Statystyka $\overline{X}$ ma przy założeniu prawdziwości $H_0$ rozkład normalny $N(\theta_0, \sigma/\sqrt{n})$, gdzie $\sigma$=0.05 i $n$=50.
- Jeśli prawdziwe $H_0$, to jakie powinny być wartości $\overline{X}$ ?
- Zamiast bezpośredniej statyki posługujemy się jej wersją standaryzowaną:

$$Z = \frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Dalej za właściwą statystykę testową uznajemy zmienną losową $Z$.

Komentarz: Literatura standardowo $\mu_0$ w miejsce $\theta_0$

## Interpretacja wartości statystyki testowej

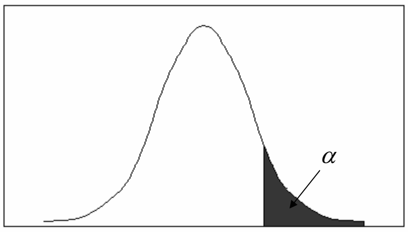
- Nietypowe / duże / mało prawdopodobne wartości statystyki $Z$ uzasadniają odrzucenie $H_0$ na korzyść hipotezy alternatywnej $H_1$.
- Które wartości statystyki $Z$ są mało prawdopodobne przy założeniu prawdziwości $H_0$?
- Określmy wartość progową prawdopodobieństwa poniżej którego będziemy uznawali wartość statystyki za nietypową przy założeniu prawdziwości $H_0$.
- Odpowiada jej pewna wartość krytyczna statystyki

$$P_{H_0}(Z \geq z_{kryt}) = \alpha$$

## Obszary krytyczne

Zbiór możliwych wartości statystyki dzielimy na:

- Zbiór krytyczny C $\rightarrow$ zbiór wartości prowadzących do odrzucenia hipotezy $H_0$ na korzyść $H_1$.
- Zbiór przyjęć C' $\rightarrow$ zbiór wartości prowadzących do nie odrzucenia hipotezy $H_0$.



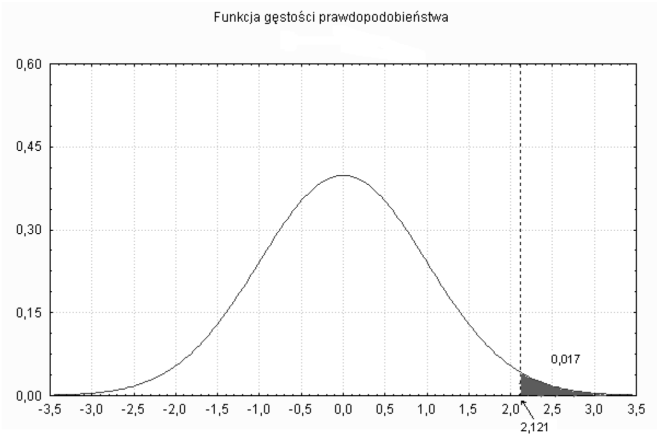

- Pomiary 50 tłoków $\rightarrow$ ich średnia $\bar{x} = 7.515$
- Obliczenia statystyki testowej

$$z = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{7.515 - 7.5}{0.05/\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{0.05}(7.515 - 7.5) = 20\sqrt{50} \cdot 0.015 = 2.121$$

$$P(z > z_{obl}) = P(z > 2.121) = 1 - P(z < 2.121)$$

$$P(z > 2.121) = 1 - P(z < 2.121) = 1 - 0.983039 = 0.017$$

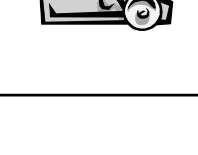
- Czy to jest wartość prawdopodobna przy założeniu prawdziwości $H_0$?




# Wartości krytyczne

- Przyjmijmy $\alpha$ = 0.01, wtedy $z_{kryt} = 2.326$
- Wszystkie wartości statystyki $Z$ nie mniejsze od 2.326 uznajemy za mało prawdopodobne, gdyby prawdziwa była $H_0$.
- Zaobserwowana wartość statystyki testowej: 2.121 < 2.326

  Brak podstaw do odrzucania hipotezy zerowej!



## Co by było, gdyby …?

- Jeśli wartość średnia w próbie byłaby: $\bar{x}^0 = 7.502$

$\bar{x}^1 = 7.505, \quad \bar{x}^2 = 7.51, \quad \bar{x}^3 = 7.52, \quad \bar{x}^4 = 7.53$

- Zmienne standaryzowane:

$$z^0 = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.502 - 7.5}{0.05/\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{0.05}(7.502 - 7.5) = 20\sqrt{50} \cdot 0.002 = 0.2828$$

$$P(z > z^0_{obl}) = P(z > 0.2828) = 1 - P(z < 0.2828)$$

| *X* | *Z* | *P* |
|---|---|---|
| 7.502 | 0.2828 | 0.3897 |
| 7.505 | 0.707 | 0.2389 |
| 7.51 | 1.414 | 0.0193 |
| 7.52 | 2.828 | 0.00023 |
| 7.53 | 4.2426 | 0.00001 |

## Etapy postępowania w testowaniu hipotez (test z)

**Krok 1**: Przyjęcie założeń i sformułowanie hipotez

- Określ badane zmienne ich skale pomiarowe i przyjmij założenia.
- Założenia dzielimy na dwie kategoria:
  1. te, których badacz jest pewien i nie chce kwestionować;
  2. te, których nie jest pewien
- (1) tworzy model; (2) wykorzystuje się do hipotez
  - Przykład założeń (1), zmienna jest zdefiniowana na skali liczbowej, ma w populacji rozkład normalny o znanym odchyleniu standardowym $\sigma$.
  - Próba losowa liczy *n* elementów.

## Etapy postępowania w testowaniu hipotez (test *z*)

(2) Sformułowanie hipotez

- $H_0 : \mu = \mu_0$
- $H_1$ hipoteza alternatywna może być sformułowana na trzy sposoby:

  $H_1 : \mu > \mu_0$ (test jednostronny)

  $H_1 : \mu < \mu_0$ (test jednostronny)

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test dwustronny)

## Etapy postępowania w testowaniu hipotez (test *z*)

**Krok 2**: Określenie statystyki testowej

- W teście istotności dla nieznanej średniej zbiorowości jest statystyka *Z* o rozkładzie normalnym standaryzowanym *N*(0,1).

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Oblicz wartość *Z* na podstawie próby.

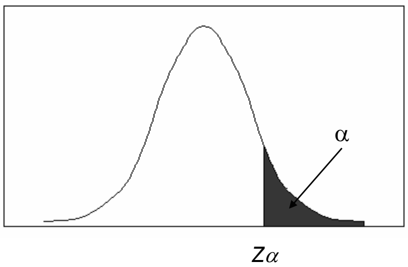
## Etapy postępowania w testowaniu hipotez (test $z$)

- **Krok 3/4** Ustalenie reguły decyzyjnej
  - Ustalenie tzw. poziomu istotności $\alpha$
  - Znając rozkład statystyki określamy, które wartości są mało prawdopodobne (odrzuć $H_0$), a które nie pozwalają na odrzucenie $H_0$.

## Obszary krytyczne

Test jednostronny („prawostronny”)

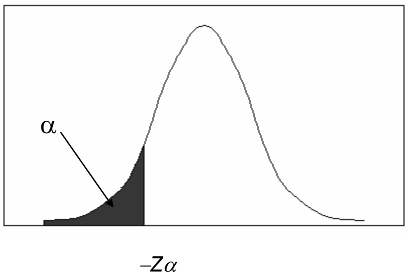
- $H_1 : \mu > \mu_0$
- $H_0$ odrzucamy, gdy $p \leq \alpha$ ($z \geq z_\alpha$)



## Obszary krytyczne

Test jednostronny („lewostronny”)

- $H_1 : \mu < \mu_0$
- $H_0$ odrzucamy, gdy $p \leq \alpha$ ($z \leq -z_\alpha$)

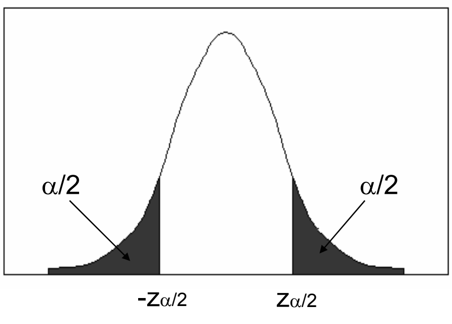



## Dwustronny obszar odrzucenia !

Test dwustronny

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- $H_0$ odrzucamy gdy **2**$p \leq \alpha$ !

tzn. $Z \leq -z_{\alpha/2}$ lub $Z \geq z_{\alpha/2}$

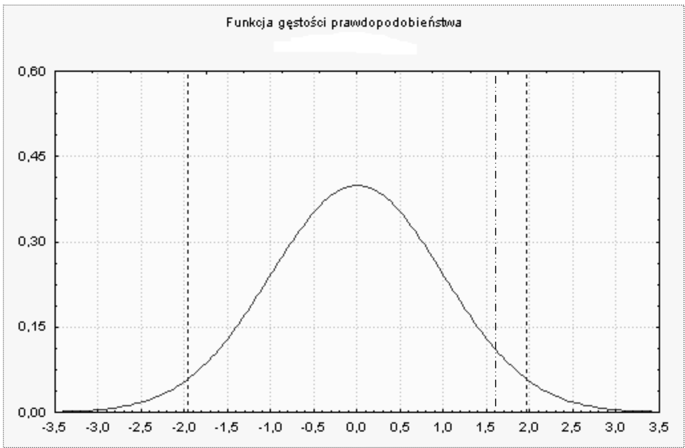


## Testy jednostronne czy dwustronne?

- Przykład oceny IQ dla $\alpha$ =0.05
- Hipoteza alternatywna $H_1$ : $\mu$(IQ) > 100
  - Dla $\alpha$ = 0.05 $Z_{kryt}$ = 1.65
- Hipoteza alternatywna $H_1$ : $\mu$(IQ) $\neq$ 100
  - Dla $\alpha$ = 0.05 obliczamy $Z_{kryt}$ , ale dotyczy to prawdopodobieństwa $\alpha/2$ , tj. 0.025

    czyli $Z_{kryt}$ = 1.96

## Test jedno- czy dwu-stronny?




1.65 1.96

## Test jedno- czy dwu-stronny?

- Zauważ, że łatwiej spełnić test jednostronny niż dwustronny!
- Badacz stosujący test jednostronny może być podejrzewany…


- Jeśli masz wątpliwości, to stosuj testy dwustronne.

## Ryzyko błędu w testowaniu hipotez

- „Statystyka niczego nie dowodzi, czyni tylko wszystko mniej lub bardziej prawdopodobnym”
  Stanisław Lem

- Decyzje statystyczne są binarne – albo odrzucimy hipotezę zerową, albo jej nie odrzucamy.
- Jakie popełniamy błędy i co z nimi zrobić?

## Decyzje statystyczne

Cztery możliwe rezultaty decyzji:

1. Odrzucenie fałszywej $H_0$,
2. Nieodrzucenie prawdziwej $H_0$,
3. Odrzucenie prawdziwej $H_0$,
4. Nieodrzucenie fałszywej $H_0$.

Dwie pierwsze decyzje są prawidłowe ☺, pozostałe są błędami.

## Błąd I i II rodzaju

- Jeżeli **odrzucimy prawdziwą** hipotezę $H_0$, to popełniamy **błąd pierwszego rodzaju**.
- Jeżeli **nie odrzucimy fałszywej** hipotezy $H_0$, to popełniamy **błąd drugiego rodzaju**.

## Decyzje wobec $H_0$ i towarzyszące im błędy

| | Odrzucamy $H_0$ | Nie odrzucamy $H_0$ |
|---|---|---|
| $H_0$ prawdziwa | Błąd I rodzaju $\alpha$ | Właściwa decyzja |
| $H_0$ fałszywa | Właściwa decyzja $(1 - \beta)$ | Błąd II rodzaju $\beta$ |

Nie odrzucamy fałszywej hipotezy $H_0$ $\rightarrow$ błąd II rodzaju ($\beta$ prawdopodobieństwo popełnienia tego błędu).
Błędy obu rodzajów są wzajemnie przeciwstawne
$\alpha\downarrow \rightarrow \beta\uparrow$

## Poziom istotności

- Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju nazywamy poziomem istotności testu (ozn. $\alpha$).
  - Jest to maksymalne ryzyko błędu, które badacz jest skłonny zaakceptować.
  - Wybór wartości $\alpha$ zależy od badacza, natury problemu i od tego, jak „ostro” chce on weryfikować swoje hipotezy.
  - Związek między doborem $\alpha$ a mocą testu $1 - \beta$.
  - Typowe wartości $\alpha$ = 0.05, 0.03, 0.01

## Powiązanie błędów I i II rodzaju

- Czy można „bezkarnie" minimalizować poziom istotności $\alpha$?
- Próba zmniejszania $\alpha$ będzie równocześnie powodowała wzrost $\beta$.
- Powróćmy do przykładu analizy średnic części tłoków:
  - Co by było, gdyby w rzeczywistości prawdziwa wartość średnia średnic wynosiłaby $\theta = 7.51$, czyli hipoteza $H_0$ byłaby fałszywa?

## Trochę rozważań teoretycznych

- W przypadku zachodzenia $H_1$ standardowy rozkład normalny ma statystyka $\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}$
- Ponadto

$$Z = \frac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\theta-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Pod warunkiem prawdziwości $H_1$ statystyka $Z$ ma rozkład normalny przesunięty względem poprzedniego rozkładu normalnego o $\frac{\theta-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

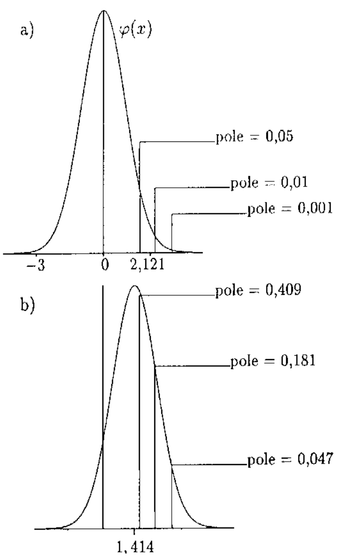
## Przykład średnic tłoków

- Jeśli prawdziwa będzie hipoteza alternatywna
- Statystyka *Z* ma rozkład o gęstości normalnej z wartością oczekiwaną

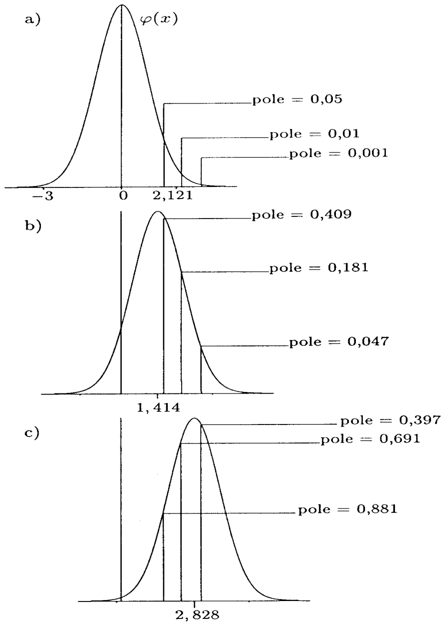
$$\frac{\theta-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 20\sqrt{50}(\theta-\theta_0) = 1.414$$

i odchyleniem standardowym 1.

## Prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej H0 i przyjęcia prawdziwej H1




- Prawdopodobieństwo jest równe całce z tej gęstości po zbiorze krytycznym.




Rys. 3.7. a) Zbiory krytyczne dla poziomów istotności: 0,05; 0,01; 0,001 i zaobserwowanej wartości statystyki testowej 2,121, b) wartości mocy dla $\theta = 7{,}51$, c) wartości mocy dla $\theta = 7{,}52$

## Moc testu

- Dla zadanej alternatywnej wartości parametru $\theta$ będącego przedmiotem testowania, prawdopodobieństwo odrzucenia (fałszywej) hipotezy zerowej i przyjęcia (prawdziwej) hipotezy alternatywnej nazywamy **mocą testu** dla tej wartości parametru $\theta$.
- Moc testu $1 - \beta$
- Moc testu zwiększa się wraz ze:
  - wzrostem poziomu istotności,
  - zwiększaniem liczebność próby *n.*

## Inne przykłady testu *Z*

- Specjaliści sieci supermarketów podejrzewają, że mleko pochodzące od jednego z producentów ma niższą zawartość tłuszczu niż nominalna wartość 3.2%.
- Sprawdź, czy zawartość tłuszczu się zmniejszyła!
- Zakłada się, że deklarowane przez producenta odchylenie standardowe zawartości tłuszczy w mleku nie zmieniło się i nadal wynosi 0.05%.
- Faktyczna zawartość tłuszczu jest wielkością losową o rozkładzie normalnym.
- Wykonano próbę 10 kartonów z partii produktu → średnia w próbie 3.167.

## Co będzie dalej?

- Sekwencyjne testowanie hipotez (ze zmianą liczebności próby)
- Testy dla wartości średniej w rodzinie rozkładów normalnych – przypadek nieznanego odchylenia standardowego.
  - Statystyka zmiennej *T*
  - Rozkład *t* Studenta
- Testy dla dwóch prób
  - Zmienne niezależne
  - Zmienne zależne („sparowane”)
- Inne testy

## Literatura


- Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, Koronacki Jacek, Mielniczuk Jan, WNT, 2001.
- Statystyka. Wprowadzenie do analizy danych sondażowych i eksperymentalnych. G.Wieczorkowska, Scholar, 2004.
- Przystępny kurs statystyki, Stanisz A., 1997.
- Po prostu statystyka, Clegg F., 1994.
- Statystyczna analiza wyników badań, Dobosz M., 2001.
- I wiele innych …


## Dziękuję za uwagę

Więcej możesz znaleźć na
http://www.cs.put.poznan.pl/jstefanowski

Czytaj także podręczniki