Elementy Analizy Numerycznej

Przykład 6.2 ze strony:

http://www.cs.put.poznan.pl/amarciniak/EMN-wyklady/EAN-13.pdf

---

Pierwszy etap zadania (rozdzielenie macierzy A na macierze L·U za pomocą eliminacji Gaussa) pomijam.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równań:

$$L\,U\,x^{(i)} = e^{(i)}\ ,\quad i = 1,2,3$$

gdzie:

$e^{(i)}$ - wektor jednostkowy z jedynką na pozycji i-tej

$x^{(i)}$ - szukany wektor kolumny i-tej

Dla $i=1$ równanie ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zamieniamy wyrażenie $Ux^{(i)}$ na $y^{(i)}$ i liczymy wektor $y^{(i)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{y_1} = 1$

$0y_1 + y_2 = 0$

$\underline{y_2} = 0$

$\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 0$

$\underline{y_3} = -\frac{1}{3}$

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

http://sirius.cs.put.poznan.pl/~inf94358

Mając dany $y^{(1)}$ możemy obliczyć $x^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$2x_3 = -\frac{1}{3}$

$\underline{x_3} = -\frac{1}{6}$

$2x_2 + 2x_3 = 0$

$2x_2 = \frac{1}{3}$

$\underline{x_2} = \frac{1}{6}$

$3x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 1$

$3x_1 = 1 - \frac{3}{6}$

$3x_1 = \frac{3}{6}$

$\underline{x_1} = \frac{1}{6}$

$$\underline{\underline{x^{(1)}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Analogicznie postępujemy z pozostałymi równaniami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(2)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{y_1} = 0$

$\underline{y_2} = 1$

$\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 0$

$\underline{y_3} = \frac{1}{2}$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$2x_3 = \frac{1}{2}$

$\underline{x_3} = \frac{1}{4}$

$2x_2 + 2x_3 = 1$

$2x_2 = 1 - \frac{1}{2}$

$2x_2 = \frac{1}{2}$

$\underline{x_2} = \frac{1}{4}$

$3x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 0$

$3x_1 = -\frac{3}{4}$

$\underline{x_1} = -\frac{1}{4}$

$$\underline{\underline{x^{(2)}}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(3)}}_{y^{(3)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{y_1} = 0 \qquad \underline{y_2} = 0 \qquad \frac{1}{3} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + y_3 = 1 \qquad y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{y_3} = 1$

$2x_3 = 1 \qquad 2x_2 + 2x_3 = 0 \qquad 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 0$

$\underline{x_3} = \frac{1}{2} \qquad 2x_2 = -1 \qquad 3x_1 = \frac{3}{2} \qquad \underline{\underline{x^{(3)}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\underline{x_2} = -\frac{1}{2} \qquad \underline{x_1} = \frac{1}{2}$

Mamy zatem wektory:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \; x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \; x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Są to kolumny macierzy A^{-1}. Aby ostatecznie zbudować macierz A^{-1} należy jeszcze uwzględnić wektor przestawień.
Dokładny sposób postępowania został opisany w materiale z wykładu.

http://sirius.cs.put.poznan.pl/~inf94358