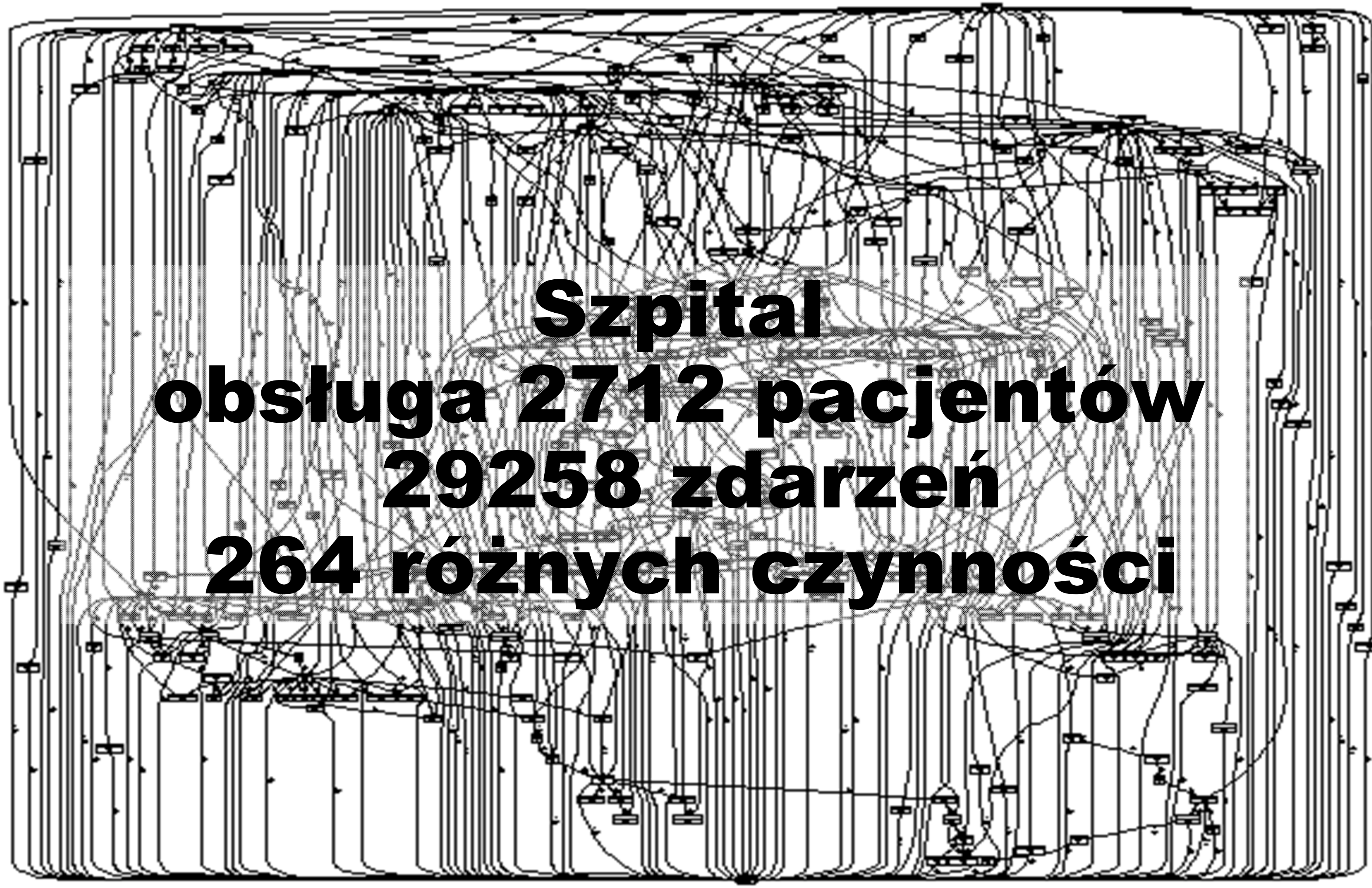
Analiza sieci Petriego

Przydatność formalnej analizy modelu procesów



Szpital
obsługa 2712 pacjentów
29258 zdarzeń
264 różnych czynności

Czy powyższy model jest poprawny?

Własności behawioralne sieci Petriego

Możliwa jest formalna weryfikacja różnych własności sieci Petriego:

- Osiągalność stanów - Reachability
- Pokrywalność – Coverability
- Ograniczoność miejsc - Bounededness
- Odwracalność - Reversibility
- Żywotność - Liveness
- Trwałość - Persistence
- Synchroniczny dystans – Synchronic distance
- Sprawiedliwość - Fairness

Osiągalność stanów

- Zbiór wszystkich stanów osiągalnych ze stanu początkowego s_0, będziemy oznaczać: **R**(s_0)
- Zbiór wszystkich możliwych sekwencji odpaleń przejść, ze stanu s_0, będziemy oznaczać: **L**(s_0)
- Osiągalność stanu s' ze stanu s_0, w wyniki sekwencji odpaleń $\alpha = t_1 \ldots t_n$ będziemy zapisywać:

$$s_0 \xrightarrow{\alpha} s'$$

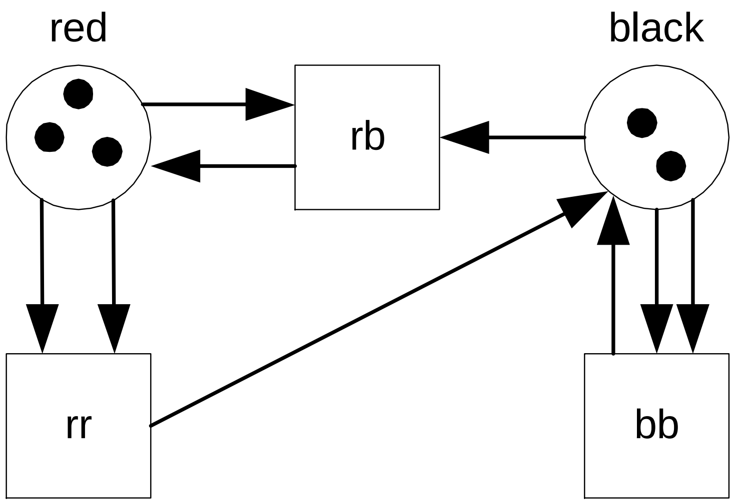
Osiągalność stanów

Czy oczekiwany stan końcowy procesu jest osiągalny z danego stanu początkowego?

- Dany stan s_N sieci Petriego jest osiągalny ze stanu s_0 jeżeli istnieje sekwencja odpaleń przejść, która przekształca stan s_0 w stan s_N
- Definicja problemu osiągalności stanu s_N ze stanu s_0

sprawdź, czy: $s_N \in R(s_0)$

Osiągalność stanów



Dana jest siec Petriego o stanie wejściowym: (red = 3, black = 2)

Stan (red = 1, black = 2) jest osiągalny ze stanu początkowego w sekwencji odpaleń:

- odpalenie przejścia **rr** (red = 1, black = 3);
- odpalenie przejścia **bb** (red = 1, black = 2).

Odwzorowanie sieci Petriego w system przejść (ang. state transition system)

Sieć Pietriego (P, T, I, O, S_0) definiuje następujący system przejść (S, TR) - graf, w którym węzłami są stany danej sieci Petriego, a krawędziami przejścia między tymi stanami:

W stanie s_1 istnieje aktywne przejście,

$$TR = \{< s_1, s_2 > \in S \times S \mid \exists t \in T \, (\forall p \in P \, (s_1(p) \geq I(p,t)) \wedge (s_2(p) = s_1(p) - I(p,t) + O(t,p)))\}$$

którego odpalenie powoduje przejście ze stanu s_1 do stanu s_2

Różne typy stanów

- **Stan początkowy** - początkowy stan rozproszenia żetonów
- **Stan osiągalny** – stan osiągalny ze stanu początkowego
- **Stan martwy** – stan, w którym nie ma aktywnych przejść.
- **Stan końcowy** – stan, w którym brak aktywnych przejść. Dla modelu pojedynczego wystąpienia procesu stan pożądany.
- **Stan bezpieczny** – stan osiągalny ze wszystkich innych stanów

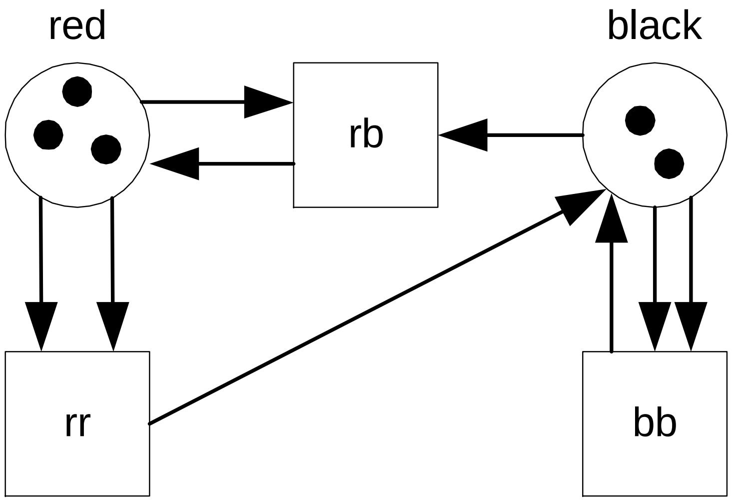
Drzewo osiągalności

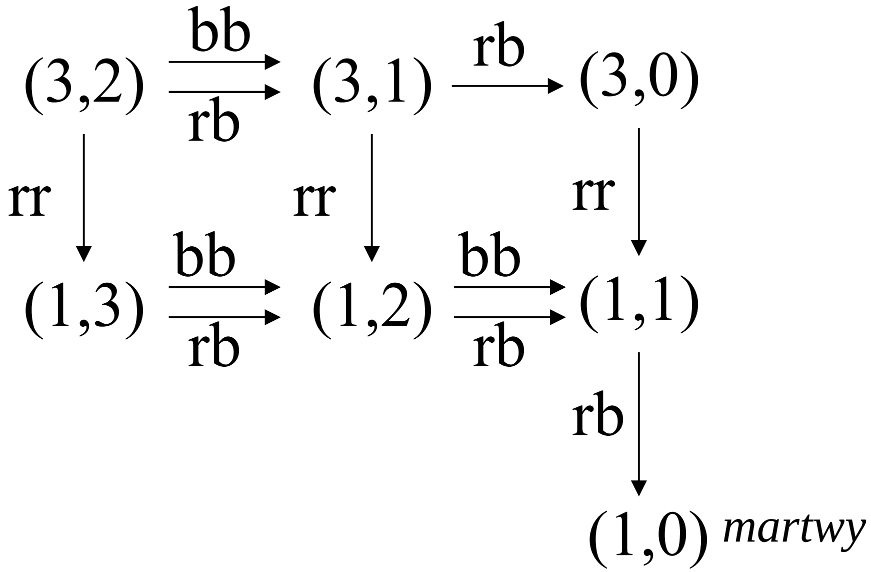
- Drzewo osiągalności sieci Petriego jest częścią systemu przejść osiągalną ze stanu początkowego
- Węzły w drzewie przejść reprezentują stany sieci.
- Korzeniem drzewa osiągalności jest stan początkowy sieci.
- Liśćmi drzewa osiągalności są stany martwe sieci lub duplikaty stanów.
- Węzły mogą być duplikowane w wypadku gdy dany stan jest już osiągalny w wyniku innej sekwencji odpaleń.
- Krawędzie w drzewie przejść reprezentują odpalenia przejść, które powodują zmianę stanu sieci. Krawędzie są etykietowane nazwą odpalanego przejścia.

Graf osiągalności

- Graf osiągalności sieci Petriego jest alternatywną reprezentacją dla drzewa przejść.
- Graf osiągalności można skonstruować z drzewa osiągalności przez sklejenie węzłów z etykietą duplikat.
- Grafy osiągalności i drzewa osiągalności mogą być w ogólności nieskończone.

Przykład grafu osiągalności

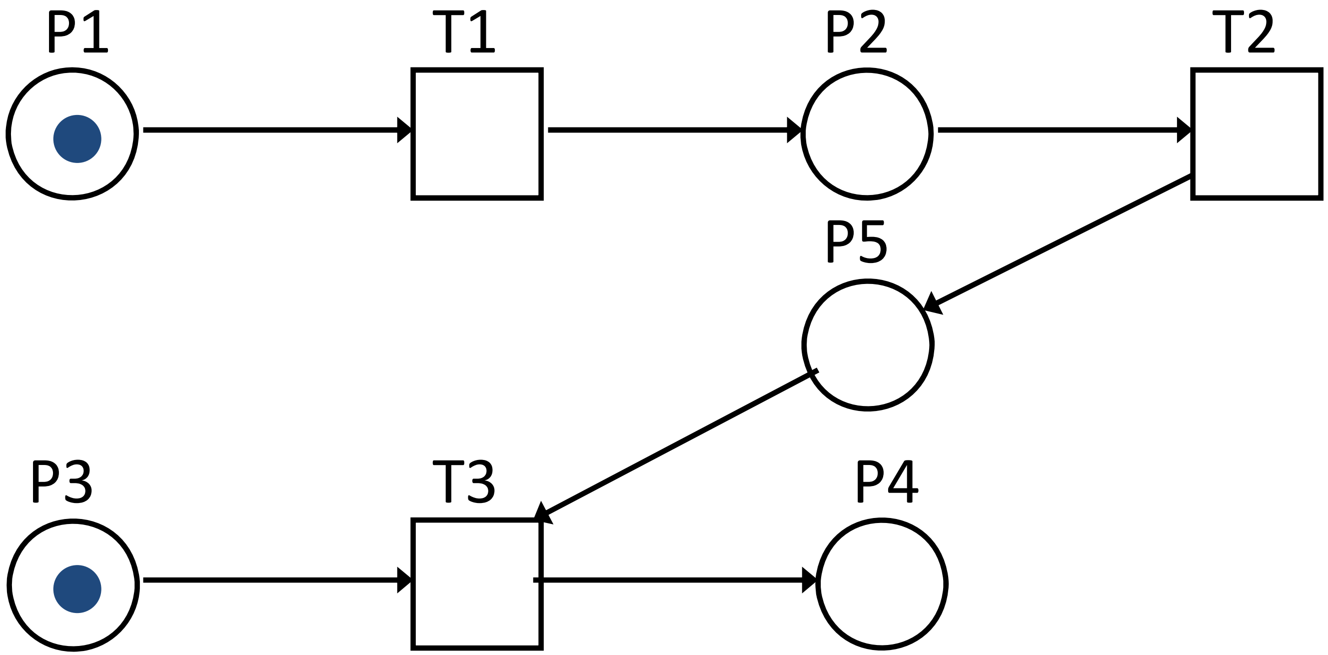




Węzły w grafie osiągalności są reprezentowane przez wektory reprezentujące stan sieci: (*red, black*).

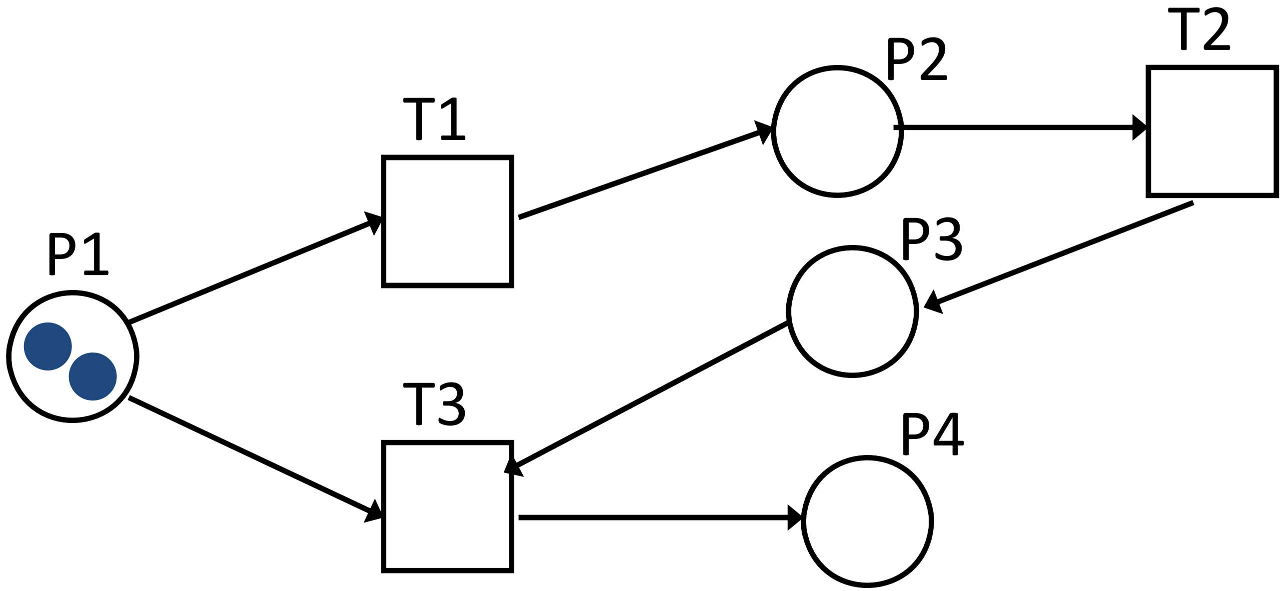
Osiągalność stanów

Narysuj graf osiągalności dla poniższej sieci Petriego



Osiągalność stanów

Czy pożądany stan końcowy [p1, p2, p3, p4] = (0,0,0,1) jest osiągalny w poniższej sieci Petriego?



Czy w powyższej sieci Petriego istnieją inne stany martwe niż stan (0,0,0,1)?

Ograniczoność sieci

- Ograniczoność sieci – "**nic złego się nie zdarzy**"
- Ograniczenie sieci gwarantuje nie przepełnianie buforów i kolejek związanych z ograniczeniem zasobów – np. liczbą wykonawców procesów.

- Dane miejsce p $\in$ P jest ograniczone, jeżeli:

$$\exists_{k \in N} \forall_{s \in R(s_0)} s(p) \leq k$$

- Miejsce takie nazywamy k-ograniczonym
- Jeżeli k=1, miejsce takie nazywamy bezpiecznym.

Ograniczoność sieci

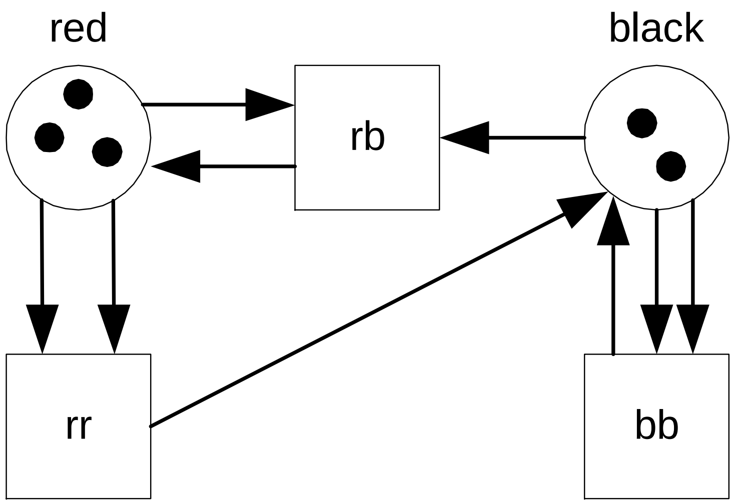
- Sieć Petriego o stanie początkowym S_0 ma ograni-czenie **k** (k-bounded), jeżeli liczba żetonów w żadnym miejscu sieci nie będzie większa niż **k**, dla wszystkich stanów osiągalnych ze stanu S_0. To jest:

$$\underset{S \in R(S_0)}{\forall} \; \underset{p \in P}{\forall} \; s(p) \leq k$$

- Sieć jest **bezpieczna** jeżeli ma ograniczenie k = 1

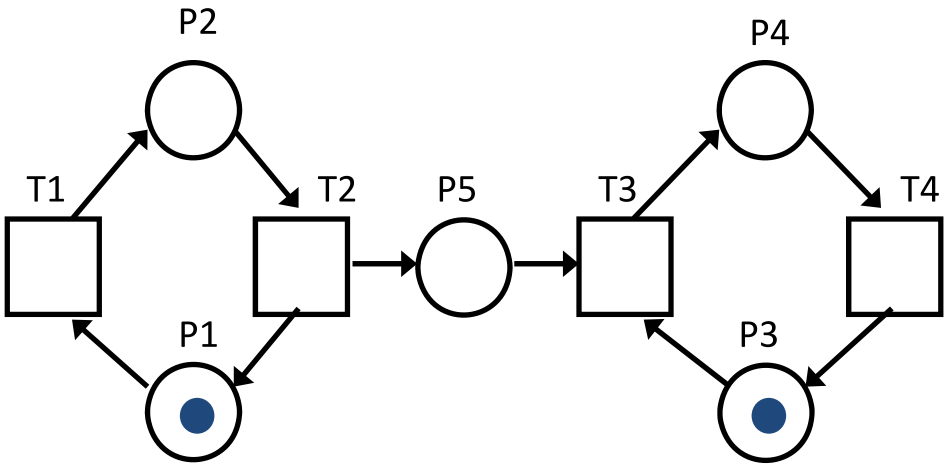
Ograniczoność

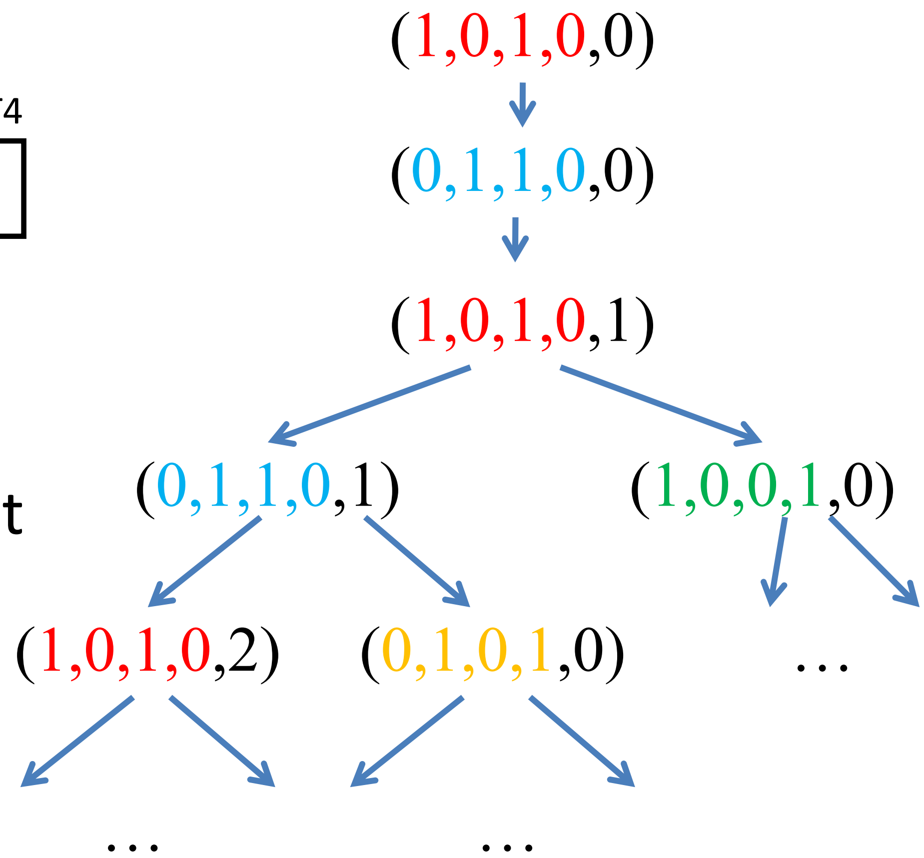
Ograniczoność danej sieci Petriego o stanie początkowym S_0 można zweryfikować, analizując graf osiągalności sieci. Sprawdź ograniczenie danej sieci.



Nieskończone grafy osiągalności

Model procesu producent-konsument z nieograniczonym buforem.





Zbiór węzłów grafu osiągalności powyższej sieci nieograniczonej jest nieskończony. Pojawiają się w nim cztery typy stanów:

- (1,0,1,0,n)
- (0,1,1,0,n)
- (0,1,0,1,n)
- (1,0,0,1,n)

Uogólnione stany sieci Petriego

Stan s_i danej sieci Petriego jest ***pokrywalny***, jeżeli w tej sieci osiągalny jest inny stan s_j taki, że:

$$\underset{p}{\forall}\, s_i(p) \leq s_j(p)$$

Nieskończony zbiór węzłów grafu osiągalności o postaci:

$$\mathbf{(n_1, n_2, \ldots, n_k \in <0, \infty>)},$$

może zostać zastąpiony węzłem pokrywającym o postaci:

$$\mathbf{(n_1, n_2, \ldots, \infty)}$$

Uogólnionym stanem (znakowaniem) sieci Petriego nazywać będziemy odwzorowanie: $S: P \rightarrow N \cup \infty$

Drzewo pokrycia

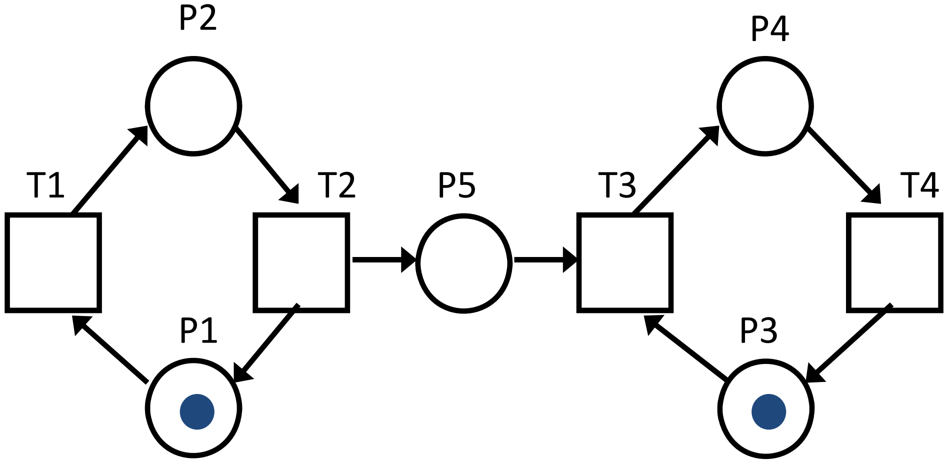
Drzewo pokrycia jest uogólnieniem drzewa osiągalności o węzły reprezentujące stany uogólnione.

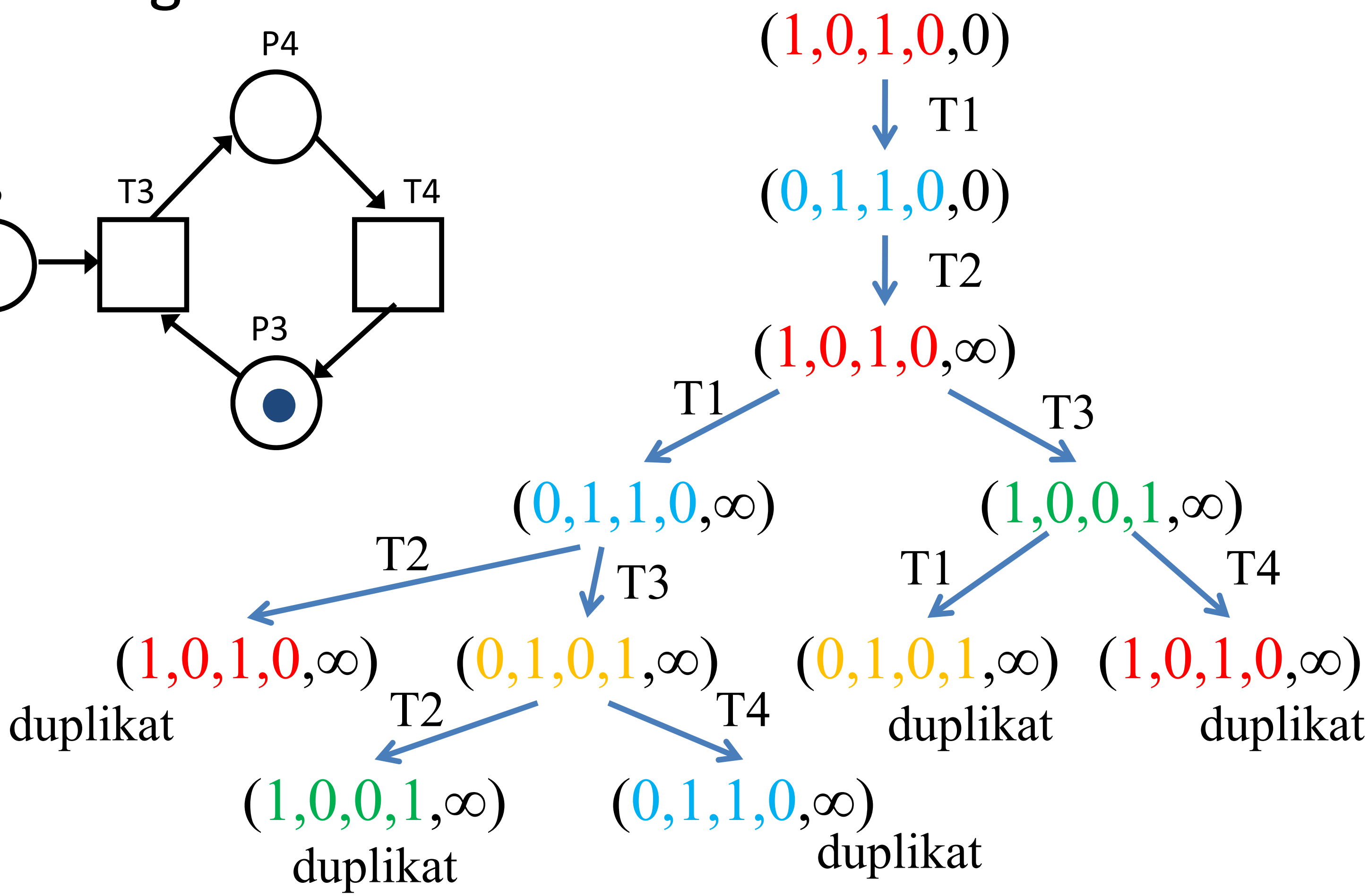
Drzewo pokrycia konstruujemy w następujący sposób:

- Korzeń drzewa reprezentuje stan początkowy sieci.
- Dla danego węzła, który nie reprezentuje stanu martwego, wygeneruj wszystkie stany $\boldsymbol{s_i}$ osiągalne przez odpalenie aktywnych przejść.
  - Jeżeli wygenerowany stan ma już swoją reprezentację w drzewie, utwórz nowy węzeł $\boldsymbol{s_i}$ i przypisz mu etykietę *duplikat*.
  - Jeżeli w drzewie na ścieżce od korzenia do nowo wygenerowanego stanu $\boldsymbol{s_i}$ istnieje węzeł reprezentujący stan $\boldsymbol{s_k}$ pokrywany przez $\boldsymbol{s_i}$, to utwórz nowy węzeł jako $\boldsymbol{s_j}$, takie że $\boldsymbol{s_j}(p) = \boldsymbol{s_i}(p)$, gdy $\boldsymbol{s_i}(p) = \boldsymbol{s_k}(p)$ oraz $\boldsymbol{s_j}(p) =\infty$, gdy $\boldsymbol{s_i}(p) > \boldsymbol{s_k}(p)$.
  - Jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych dwóch wypadków, dołącz do drzewa węzeł reprezentujący stan $\boldsymbol{s_i}$.
- Do tworzonych węzłów dołącz krawędzie etykietowane nazwą przejścia, którego odpalenie wygenerowało nowy stan.

Drzewo pokrycia

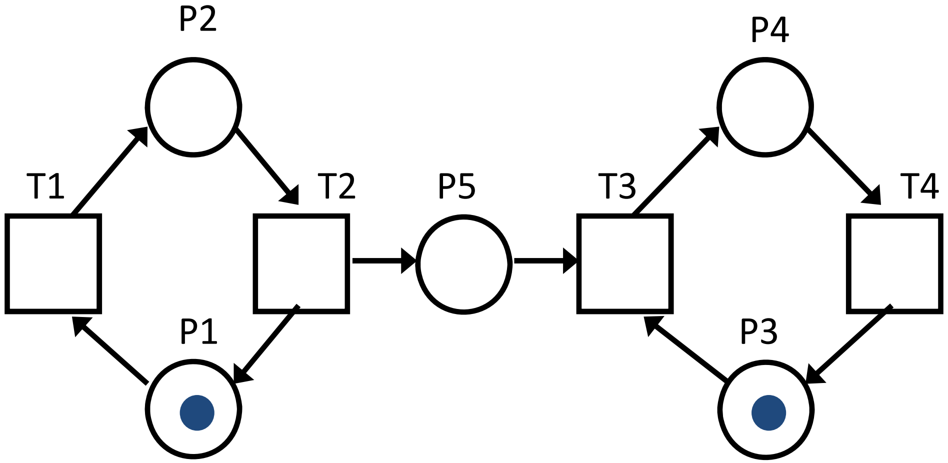
Skonstruuj drzewo pokrycia dla poniższej sieci Petriego:

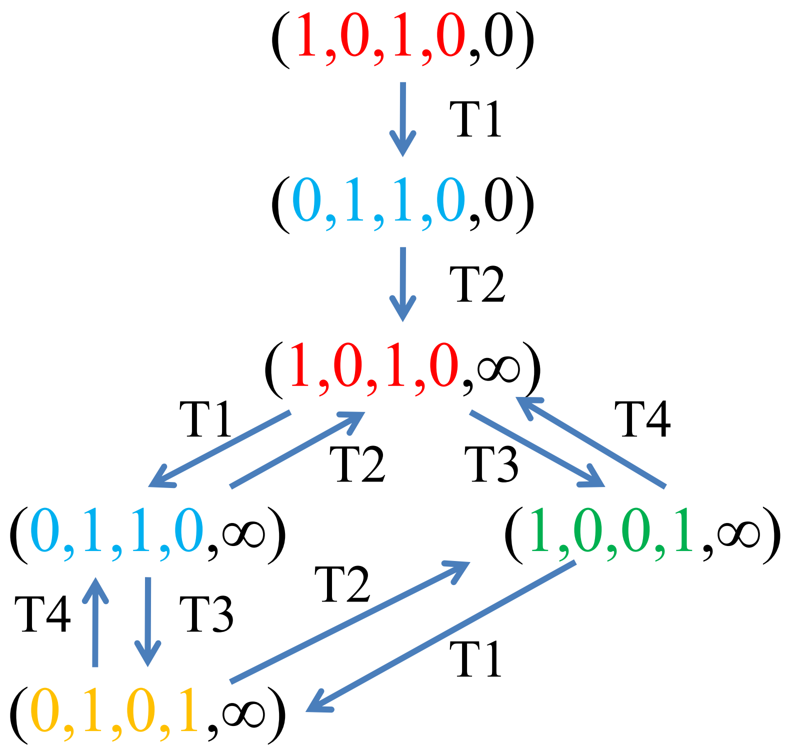




Graf pokrycia

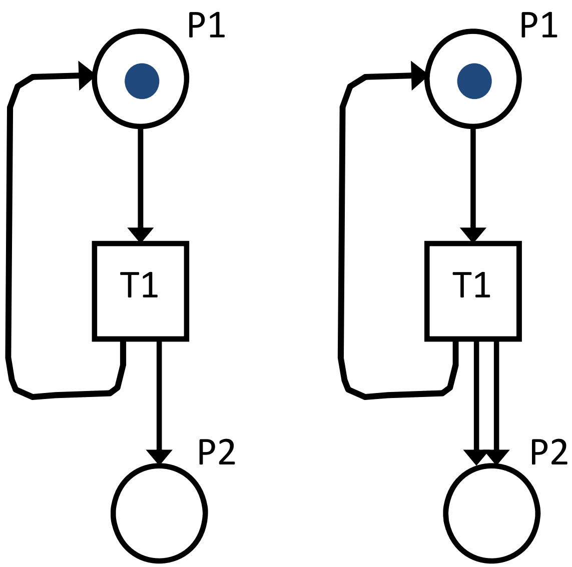
Graf pokrycia konstruujemy na podstawie drzewa pokrycia poprzez scalenie węzłów z etykietą duplikat. Utwórz graf pokrycia dla poniższej sieci Petriego:





Ograniczenia drzew i grafów pokrycia

Symbol ∞ uniemożliwia rozróżnienie wszystkich stanów i rozstrzygnięcie problemów osiągalności i żywotności sieci.

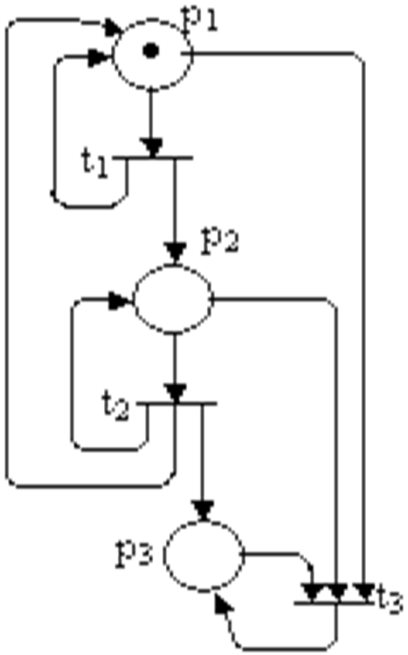


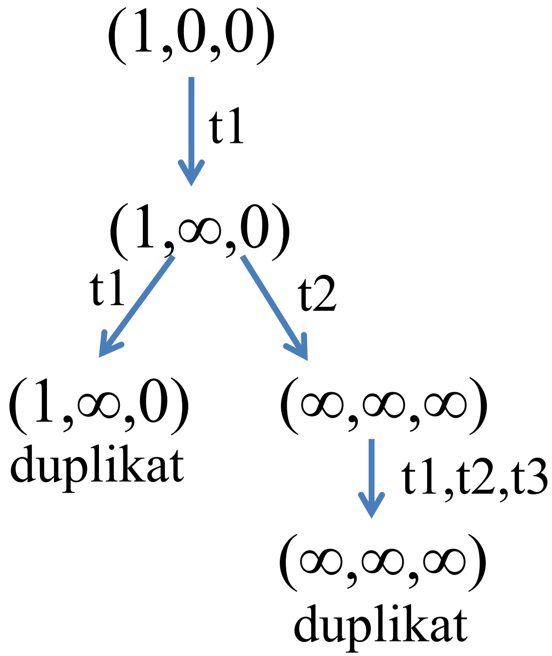
$$(1,0) \xrightarrow{T1} (1,\infty) \xrightarrow{T1} (1,\infty)$$

duplikat

Sieci pokazane na rysunku mają takie samo drzewo osiągalności. Jednak zbiory stanów osiągalnych dla tych sieci są istotnie różne.

Ograniczenia drzew i grafów pokrycia





- Drzewo osiągalności przykładowej sieci nie zawiera stanu martwego, jednak sekwencja odpaleń:

$$100 \xrightarrow{t_1} 110 \xrightarrow{t_2} 211 \xrightarrow{t_3} 101 \xrightarrow{t_1} 111 \xrightarrow{t_3} \color{red}{001}$$

prowadzi do zakleszczenia.

Odtwarzalność i odwracalność

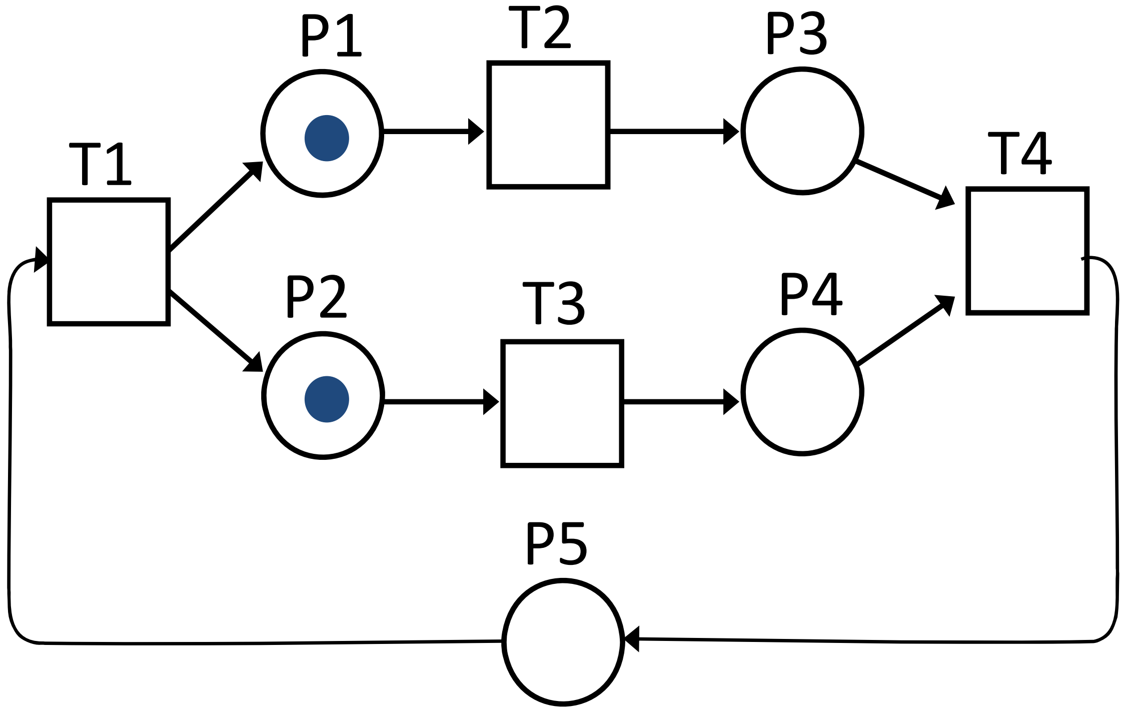
- Dana sieć Petriego o stanie początkowym S_0 jest **odtwarzalna** (*możliwość wycofania się z błędów*), jeżeli istnieje stan S osiągalny ze stanu S_0 taki, że stan S_0 jest osiągalny ze stanu S.
  Dla **niektórych** stanów sieci, istnieje możliwość powrotu do stanu początkowego.
- Dana sieć Petriego o stanie początkowym S_0 jest **odwracalna**, jeżeli dla każdego stanu S osiągalnego ze stanu S_0, stan S_0 jest osiągalny ze stanu S.
  Dla **wszystkich** stanów sieci, istnieje możliwość powrotu do stanu początkowego.

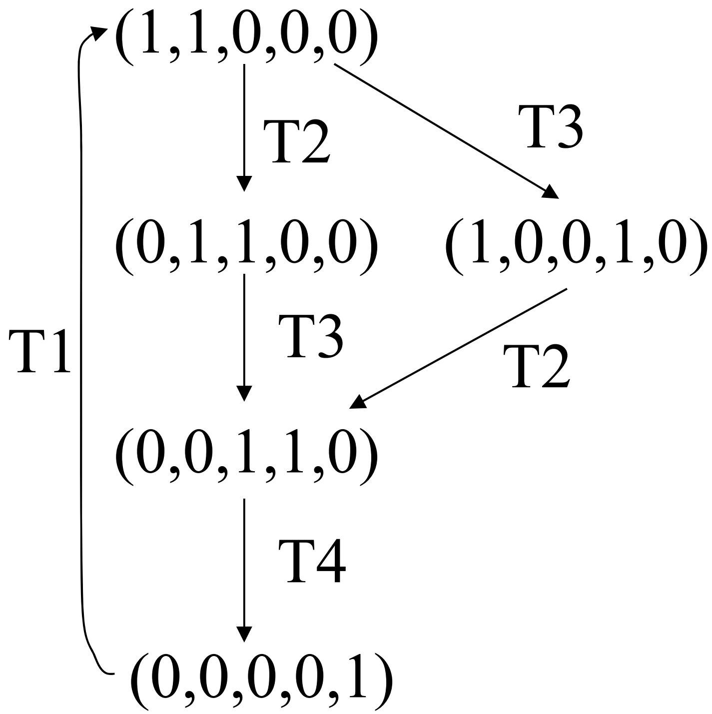
Żywotność sieci

- Żywotność sieci – „**wszystko się może zdarzyć**"
- **Żywotność** sieci Petriego weryfikuje potencjalną możliwość odpalenia każdego z przejść sieci, co gwarantuje ciągłość działania sieci.
- Jeżeli dla dowolnego stanu osiągalnego ze stanu początkowego, dla każdego z przejść sieci Petriego istnieje sekwencja odpaleń innych przyjść, która uaktywnia to przejście, to taką sieć nazywać będziemy **żywotną**.
- Pozytywna weryfikacja żywotności sieci Petriego gwarantuje całkowity brak zakleszczeń w sieci modelującej ciągłość pracy jednostki organizacyjnej.

Żywotność sieci Petriego

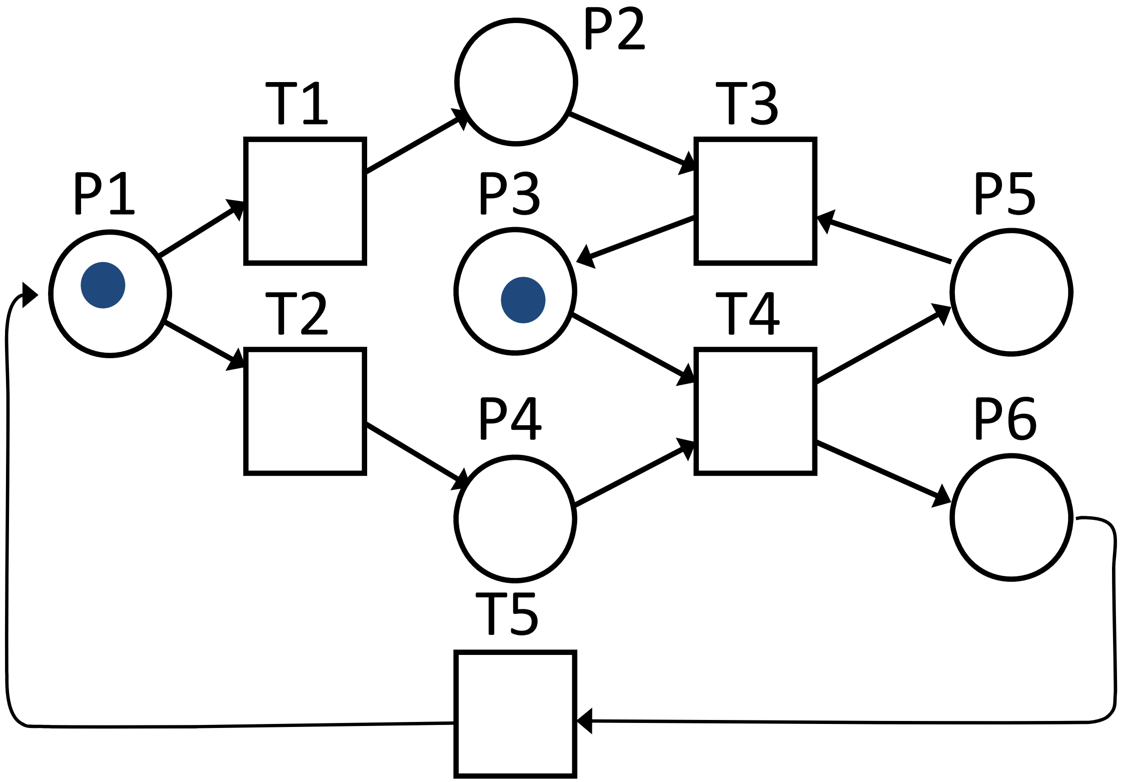
Poniższa sieć Petriego jest *żywotna*. Dla dowolnego stanu dostępne są ścieżki w grafie osiągalności, które zawierają odpalenia każdego z przejść.

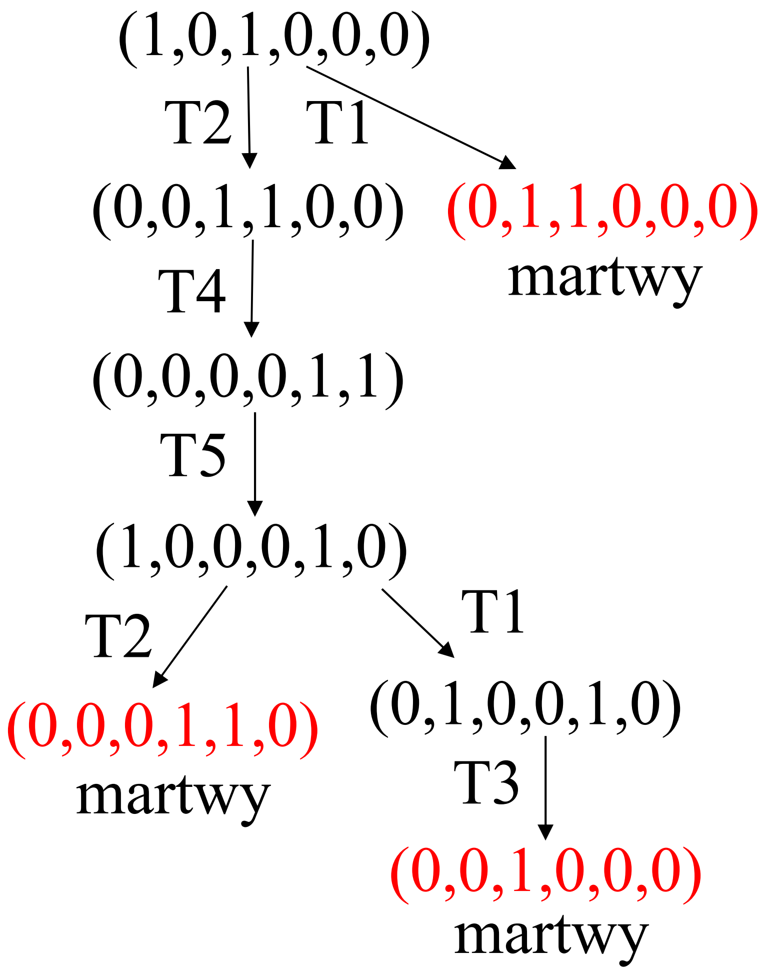




Żywotność sieci Petriego

Poniższa sieć Petriego nie posiada cechy żywotności, mimo że wszystkie jej przejścia mogą być potencjalnie odpalone.





Słabsze definicje żywotności

Dla danej sieci Petriego przejście $\mathbf{t}$ jest:

- **Martwe** (**L0**-żywotne) – jeżeli nie może ono być odpalone w żadnym osiągalnym stanie sieci, tzn. $\exists\alpha\in\mathbf{L}(s_0) : \mathbf{t} \in \alpha$. Martwe przejście może zostać usunięte z sieci Petriego, bez zmiany jej zachowania.
- **Potencjalnie wykonywalne** (**L1**-żywotne) – jeżeli może być odpalone, co najmniej raz, dla niektórych stanów osiągalnych ze stanu początkowego, tzn. $\exists\alpha\in\mathbf{L}(s_0) : \mathbf{t} \in \alpha$.
- **L2-żywotne** – dla dowolnej liczby naturalnej *k*, przejście $\mathbf{t}$ może być odpalone co najmniej *k* razy dla niektórych stanów osiągalnych ze stanu początkowego, tzn. krawędź $\mathbf{t}$ musi być elementem jakiegoś cyklu w grafie osiągalności.
- **L3-żywotne** – jeżeli jest możliwe odpalenie $\mathbf{t}$ nieskończoną liczbę razy dla niektórych stanów osiągalnych ze stanu początkowego.
- **Żywotne** (**L4**-żywotne) – jeżeli $\mathbf{t}$ może być ciągle odpalone, dla każdego stanu osiągalnego ze stanu początkowego.

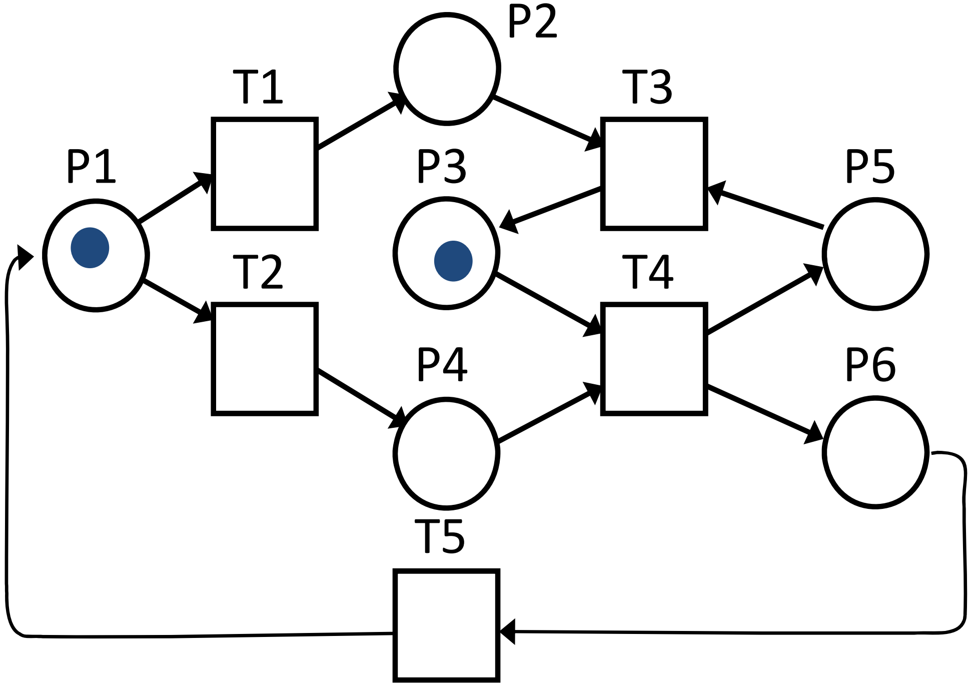
Definicje żywotności sieci

- Sieć Petriego jest ***Lk-żywotna***, jeżeli wszystkie jej przejścia są Lk-żywotne.
- Sieć Petriego jest ***dokładnie Lk-żywotna***, jeżeli jest Lk-żywotna, ale nie jest Lk+1-żywotna.
- Sieć Petriego jest ***strukturalnie Lk-żywotna***, jeżeli istnieje dla niej stan początkowy, dla którego jest Lk-żywotna.

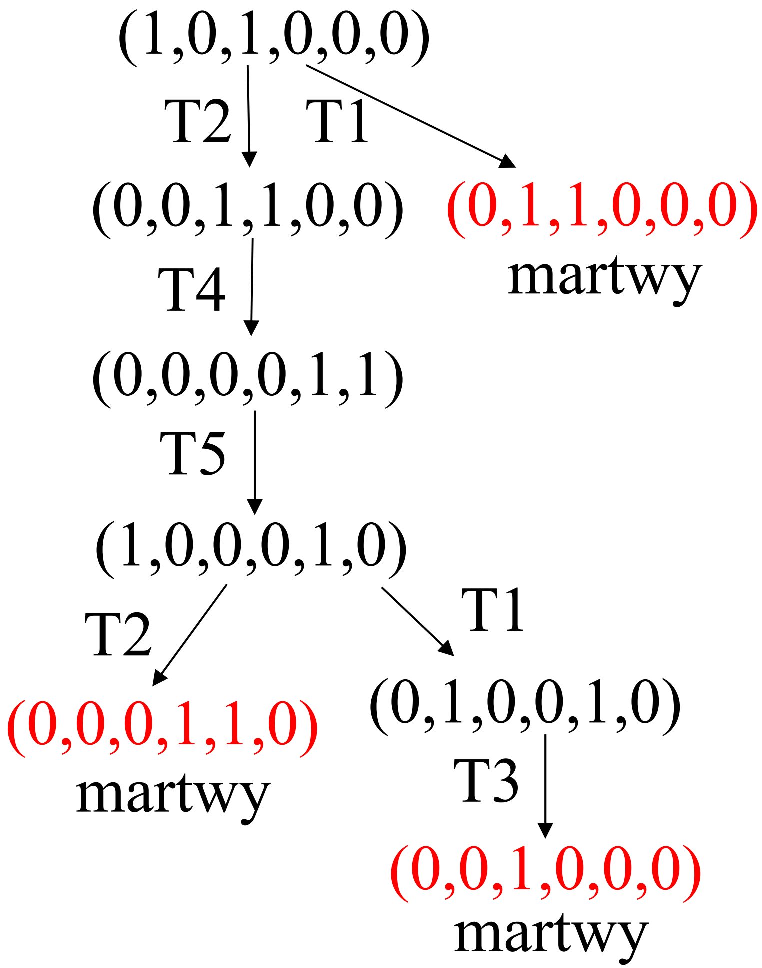
Słabsze definicje żywotności

Prawdziwe są poniższe zależności:

$$L4 \Rightarrow L3 \Rightarrow L2 \Rightarrow L1$$

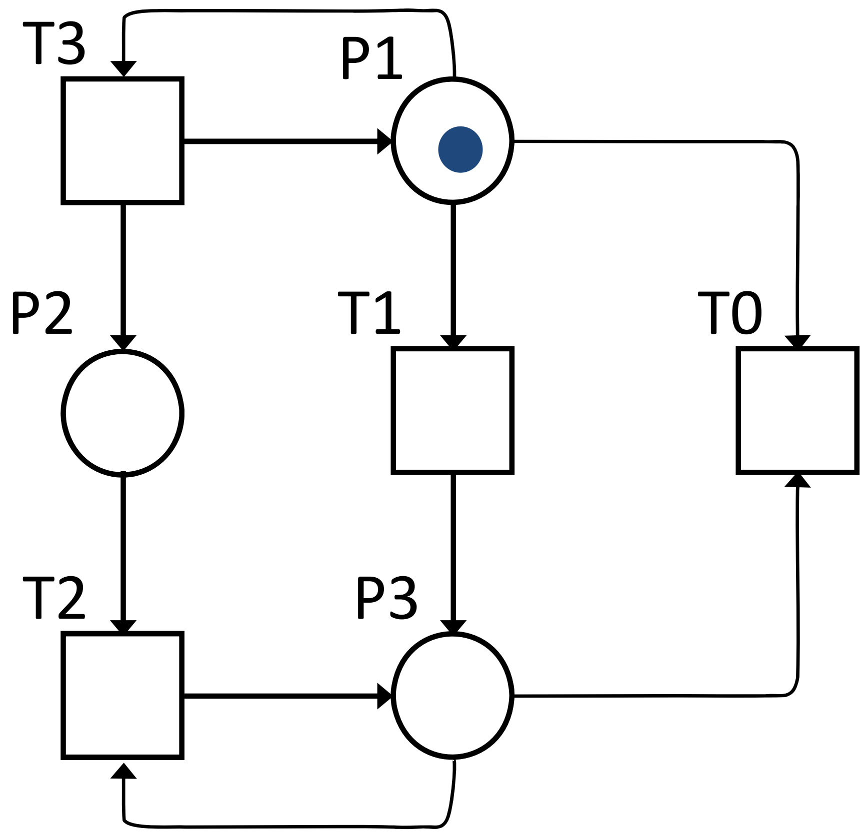


Przedstawiona sieć Petriego jest dokładnie L1-żywotna



Żywotność sieci

Zweryfikuj żywotność wszystkich przejść poniższej sieci:



Lk(T0) = ?

Lk(T1) = ?

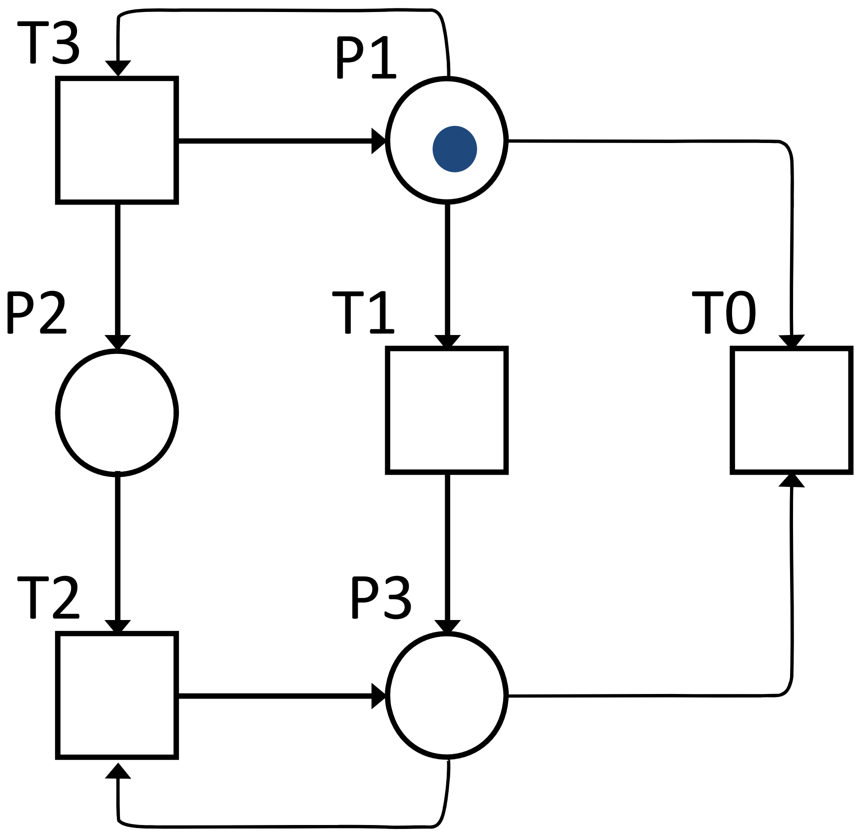
Lk(T2) = ?

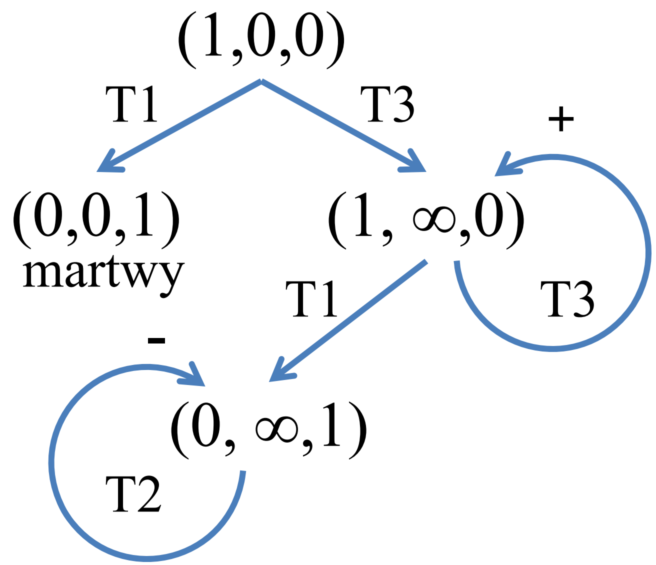
Lk(T3) = ?

Lk(sieci) = ?

Żywotność sieci

Zweryfikuj żywotność wszystkich przejść poniższej sieci:





L_1 = T1

L_2 = T3, T1, T2

L_3 = T3, T3, T1, T2, T2

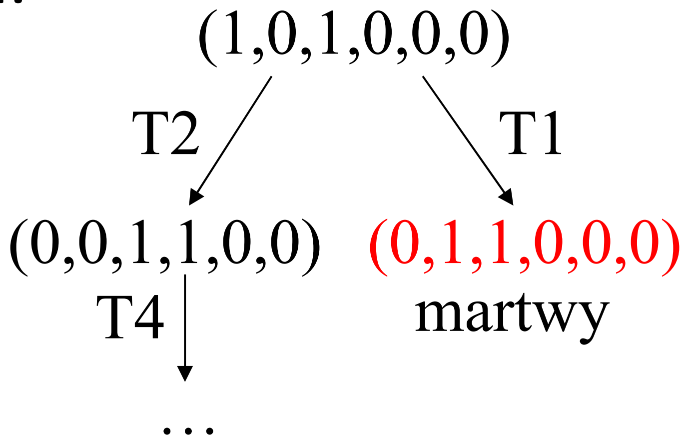
...

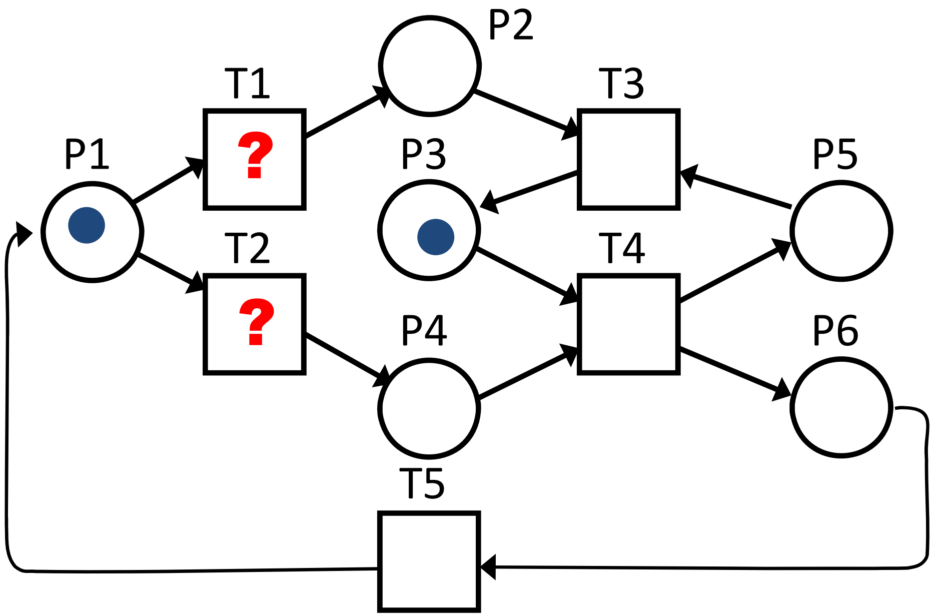
Żywotność miejsc

- Miejsce **p** danej sieci jest żywotne dla danego stanu początkowego $\mathbf{s}_0$, jeżeli dla dowolnego stanu **s** osiągalnego z $\mathbf{s}_0$, istnieje stan **s**’ osiągalny z **s**, dla którego **s**’(**p**) > 0.
- Żywotność miejsca oznacza, że zawsze ma ono szansę ponownie zawierać znaczniki.
- Sieć Petriego nazywamy żywotną ze względu na miejsca, jeżeli wszystkie jej miejsca są żywotne.

Trwałość

- Sieć Petriego posiada cechę trwałości, jeżeli dla dowolnego stanu sieci, w którym są aktywne dwa przejścia T_i i T_j, odpalenie przejścia T_i nie spowoduje zablokowania przejścia T_j.
- Trwałość powinna dotyczyć przejść występujących w równoległych gałęziach przetwarzania.





Synchroniczny dystans

- Własność synchronicznego dystansu jest miarą zależności dwóch zdarzeń
- Synchroniczny dystans między dwoma przejściami t_1 i t_2 w sieci Petriego (N, s_0), jest zdefiniowany następująco:

$$d_{12} = \max_{\alpha} \left| \overline{\alpha}(t_1) - \overline{\alpha}(t_2) \right|$$

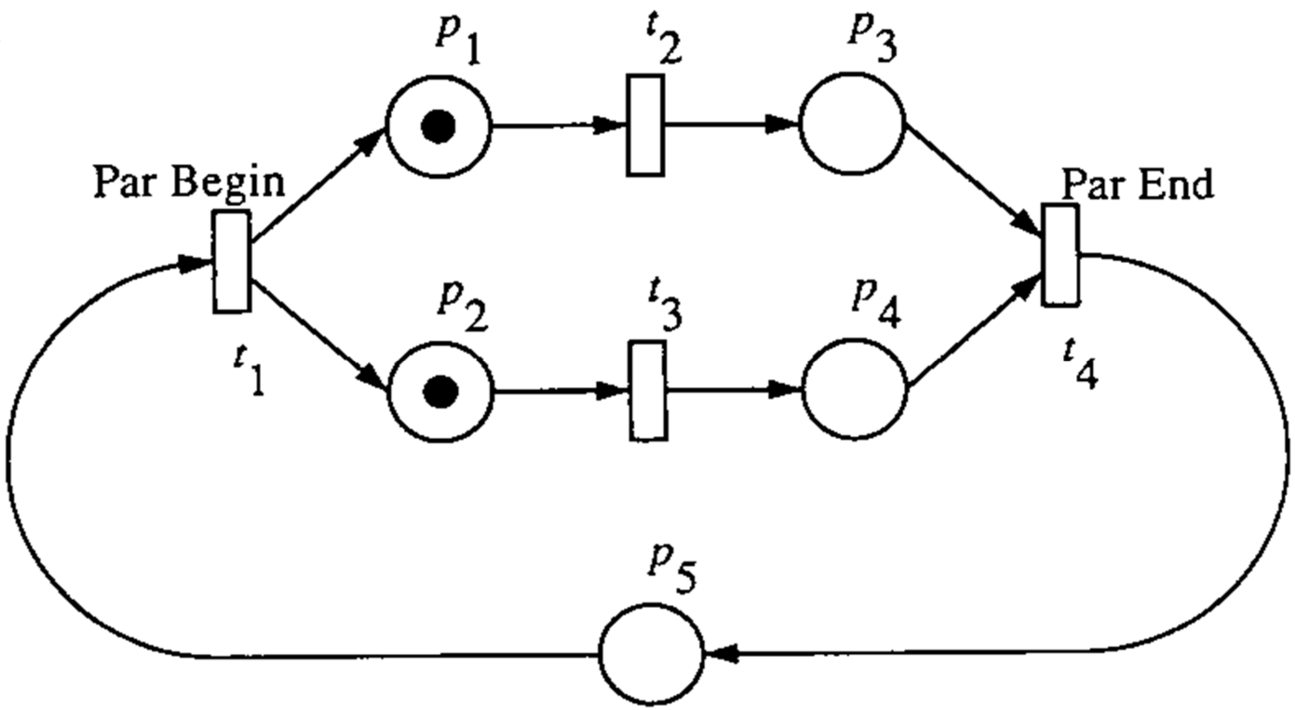
gdzie:

- α jest sekwencją odpaleń przejść rozpoczynająca się w stanie $s \in R(s_0)$;
- $\overline{\alpha}(t_i)$ – jest liczbą odpaleń przejścia t_i , w sekwencji odpaleń α.

Synchroniczny dystans może być używany jako miara równomiernego obciążenia zasobów procesów biznesowych.

Synchroniczny dystans

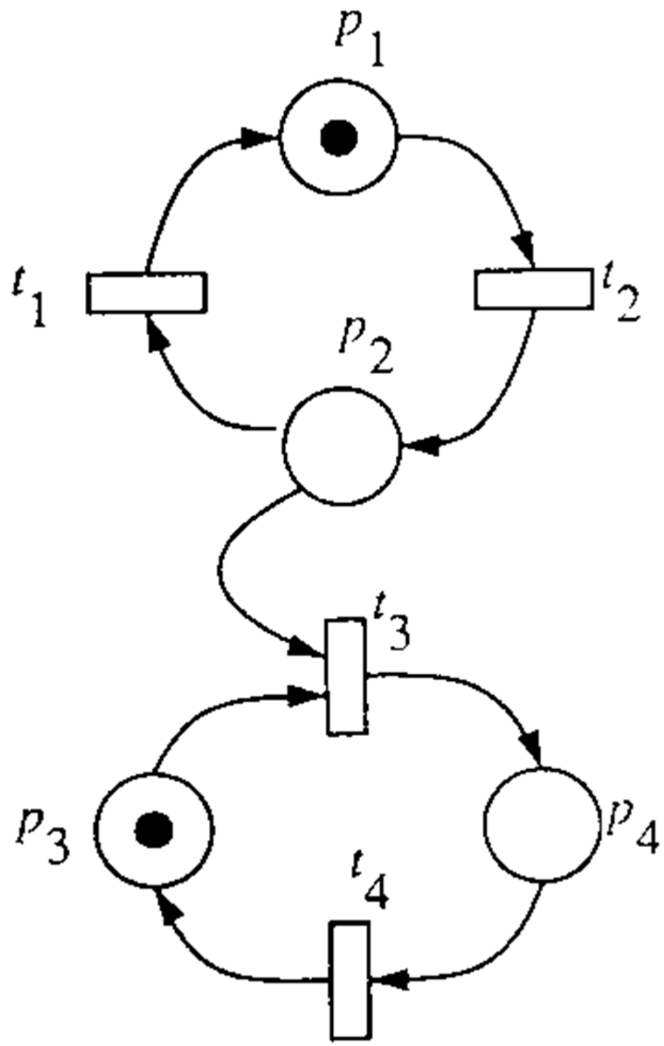
Ustal dystans między zdarzeniami reprezentowanymi przez przejścia t_2 i t_3.



d_{23} = 2, bo w stanie $s_1(1,0,0,1,0)$, może wystąpić sekwencja odpaleń: t_2, t_4, t_1, t_2, w której $\alpha(t_2)=2$ i $\alpha(t_3)=0$

Synchroniczny dystans

Ustal dystans między zdarzeniami reprezentowanymi przez odpalanie przejść t_1 i t_2 oraz t_1 i t_3



$d_{12} = 1$

$d_{13} = \infty$

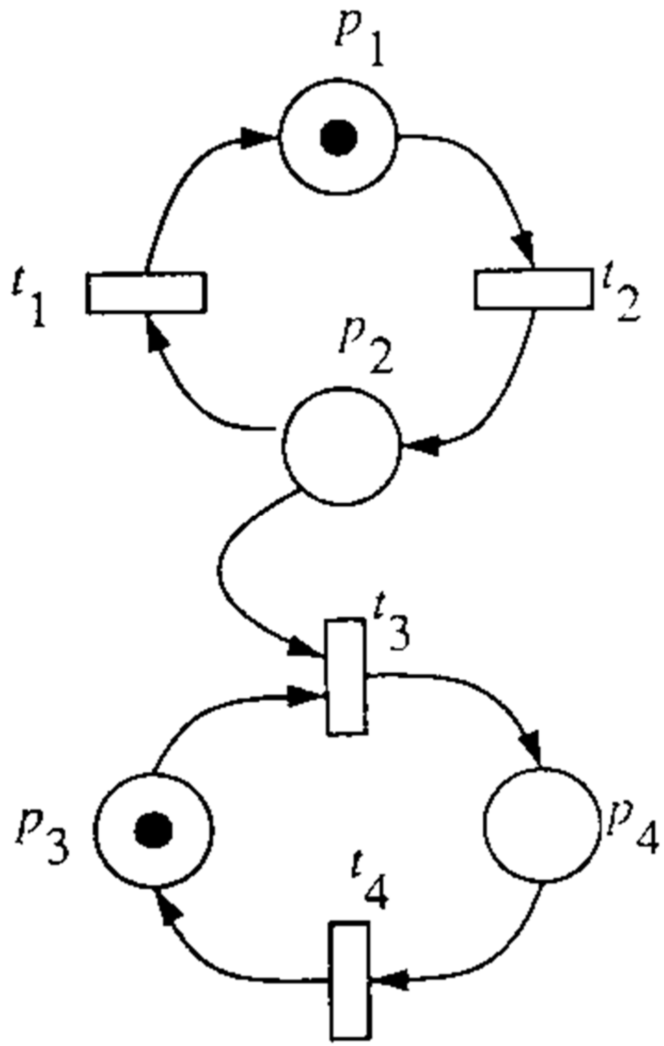
Sprawiedliwość sieci Petriego

- **Ograniczona sprawiedliwość** – dwa przejścia występują w relacji *ograniczonej sprawiedliwości*, jeżeli liczba odpaleń jednego z przejść, w czasie, gdy drugie przejście nie jest odpalane, jest ograniczona. Sieć Petriego jest siecią *ograniczenie sprawiedliwą*, gdy wszystkie pary jej przejść są w relacji ograniczonej sprawiedliwości.
- **Bezwarunkowa sprawiedliwość** - ciąg przejść jest *bezwarunkowo sprawiedliwy*, jeżeli jest skończony lub każde przejście występuje w nim nieskończoną liczbę razy. Sieć Petriego (N, s_0) jest bezwarunkowo sprawiedliwa, jeżeli każdy ciąg przejść $\alpha \in \mathcal{L}(s_0)$ jest *bezwarunkowo sprawiedliwy*.

Każda sieć o ograniczonej sprawiedliwości jest bezwarunkowo sprawiedliwa, i każda ograniczona sieć o bezwarunkowej sprawiedliwości ma własność ograniczonej sprawiedliwości.

Sprawiedliwość sieci Petriego

- Podana sieć Petriego nie jest ani ograniczenie sprawiedliwa, ani bezwarunkowo sprawiedliwa.
  Przejście t_1 (t_2) może odpalić nieskończoną liczbę razy, w czasie gdy t_3 i t_4 nie są odpalane.
  Przejścia t_3 i t_4 nie pojawią się w nieskończonej sekwencji odpaleń przejść (t_2, t_1)*.



Macierzowa postać sieci Petriego

- Sieć Petriego może być przedstawiona w postaci dwóch macierzy: wejściowej $N^{+}=(\alpha_{ij})_{nxm}$ i wyjściowej $N^{-}=(\alpha_{ij})_{nxm}$, o współczynnikach całkowitych, reprezentujących liczbę krawędzi wejściowych i wyjściowych dla poszczególnych miejsc.

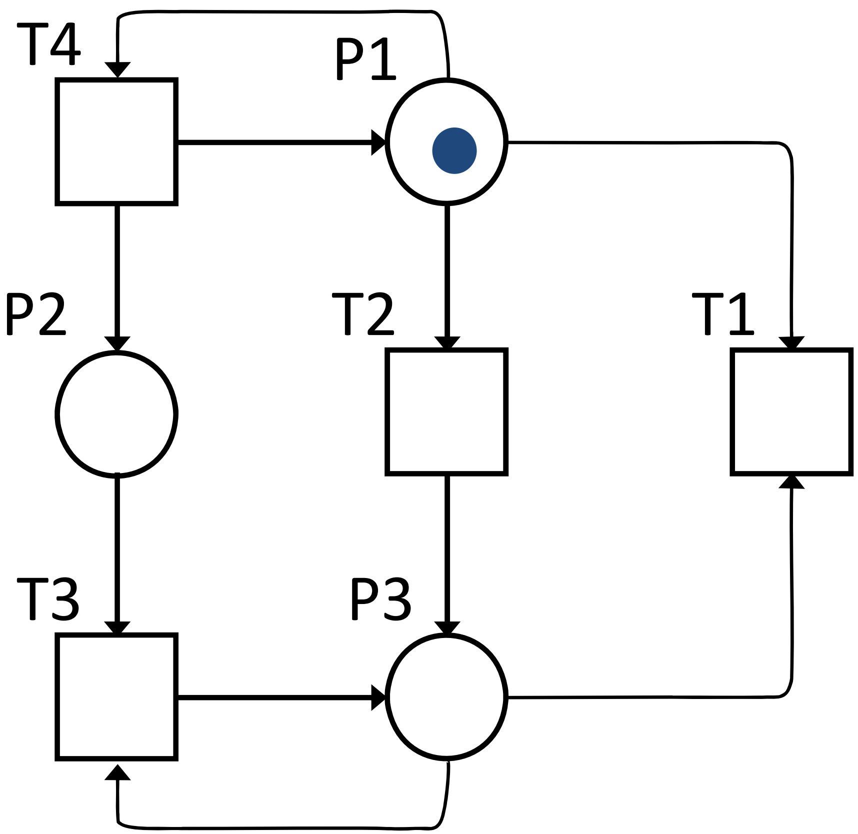
$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ \cdots \\ p_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

gdzie:

- α_{ij} – jest liczbą krawędzi wejściowych lub wyjściowych z przejścia *j* do miejsca *i* (miejsca *i* do przejścia *j*)

Macierzowa postać sieci Petriego - przykład

- Dana sieć Petriego:



$$\equiv$$

$$N^- = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$N^+ = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Interpretacja reprezentacji macierzowej

- Dana sieć Petriego:

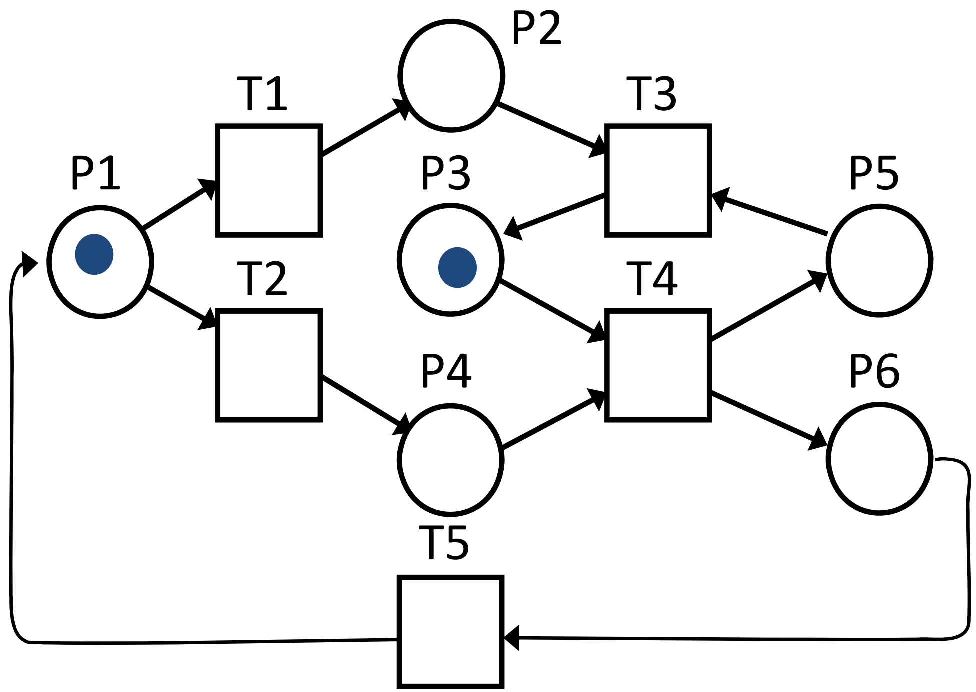
$$N^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Przejście t_i jest aktywne, wtedy i tylko wtedy, gdy wektor t^{-}_{i} będący *i*-tą kolumną macierzy N^{-}, spełnia zależność: $t^{-}_{i} \leq S$.
- Stan S' powstały przez odpalenie przejścia i, można wyznaczyć jako: $S' = S - t^{-}_{i} + t^{+}_{i}$

Interpretacja reprezentacji macierzowej

Dla danej sieć Petriego:

- zdefiniuj macierze N^- i N^+;
- wyznacz przejścia aktywne w stanie początkowym
- wyznacz stany osiągalne przez odpalenie przejść aktywnych w stanie początkowym



Macierz incydencji sieci Petriego

- ***Macierzą incydencji*** danej sieci Petriego, nazywamy macierz N = $(\alpha_{ij})_{nxm}$, taką że:

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}^{+} - \mathrm{N}^{-}$$

$$N^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Współczynniki macierzy incydencji pokazują zmiany w liczbie żetonów składowanych w poszczególnych miejscach sieci w wyniku odpalenia przejścia, danego przejścia t_j.

Równanie stanu sieci Petriego

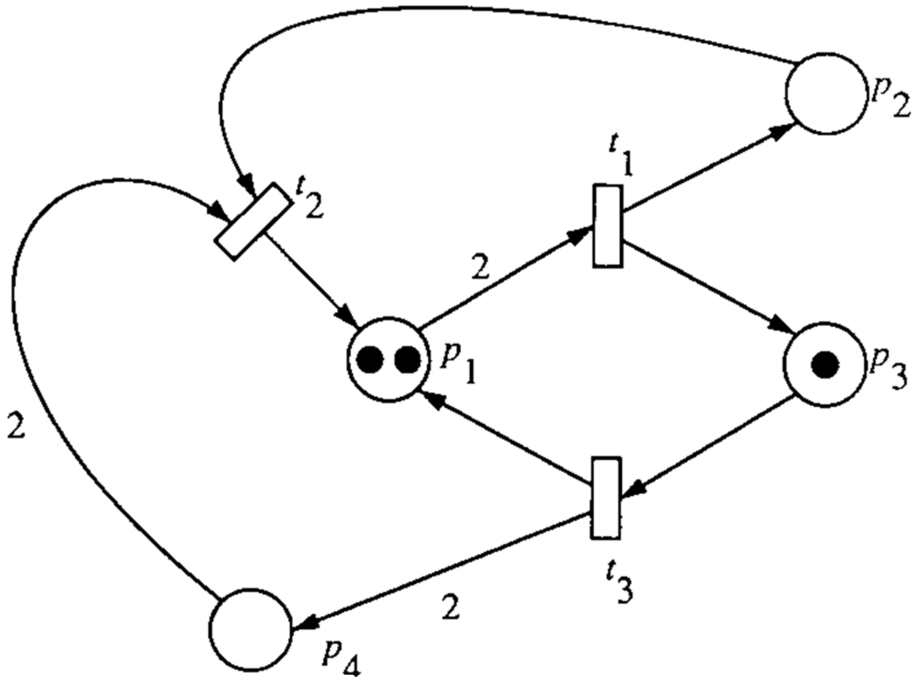
- Dana jest sieć Petriego, której struktura jest opisana przez macierz incydencji N. ***Równanie stanu*** sieci Petriego ma postać:

$$s' = s + A^T u_k$$

gdzie: s i s' są wektorami reprezentującymi stan sieci, a u_k jest wektorem kontrolnym, zawierającym wartości równe 0 i dokładnie jedną jedynkę reprezentującą odpalane przejście.

Równanie stanu sieci Petriego

- Dana sieć Petriego:



- Równanie stanu ilustrujące odpalenie przejścia t3, wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Niezmienniki miejsc

Niezmienniki miejsc opisują pewne stałe własności stanów osiągalnych w danej sieci, charakteryzujących zbiory miejsc sieci, w których łączna (ewentualnie ważona) liczba żetonów jest stała.

Występowanie niezmiennika zbioru miejsc $P' \subseteq P$ oznacza, że liczba żetonów alokowanych w tym zbiorze miejsc będzie stała podczas działania sieci. Własność tę można opisać następującym układem równań:

$(t^{+}_{1} - t^{-}_{1}) \bullet C_{P'} = 0$

$(t^{+}_{2} - t^{-}_{2}) \bullet C_{P'} = 0$

…

$(t^{+}_{m} - t^{-}_{m}) \bullet C_{P'} = 0$

gdzie:

- $C_{P'}$ jest wektorem charakterystycznym opisującym podzbiór miejsc sieci;
- symbol $\bullet$ reprezentuje iloczyn skalarny

Niezmienniki miejsc

Ponieważ różnice: $(t^{+}_{2} - t^{-}_{2})$ są kolumnami macierzy incydencji, podany układ równań można przedstawić jako równanie macierzowe:

$$N^T \bullet C_{P'} = 0$$

gdzie: N^T jest macierzą transponowaną macierzy N.

Niezmiennikiem miejsc nazywamy wektor *I*, o nieujemnych współrzędnych, dla którego spełniona jest nierówność:

$$N^T \bullet I = 0$$

Dla dowolnego niezmiennika sieci *I* i dowolnego stanu *s* osiąganego ze stanu początkowego s_0:

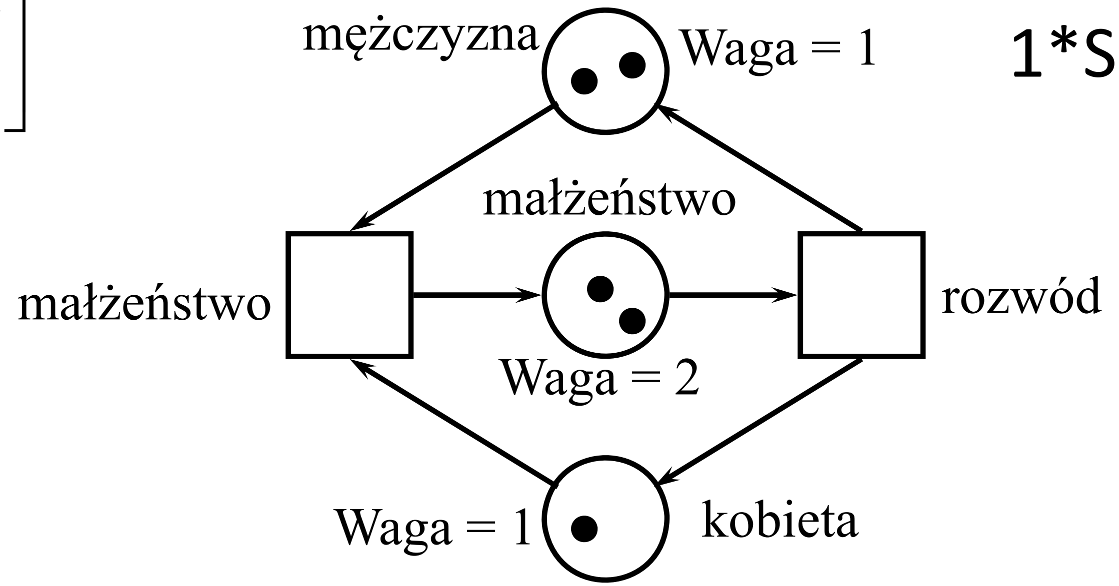
$$s \bullet I = s_0 \bullet I$$

Niezmienniki miejsc - przykład

Niezmiennikiem miejsc dla poniższej sieci Petriego jest wektor:

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1*S(mężczyzna) +
2*S(małżeństwo) +
1*S(kobieta) = 7



Pułapki i zatrzaski

- ***Pułapka*** (trap) jest zbiorem miejsc w sieci, które jeżeli zawierają żetony w danym stanie *s*, to będą je posiadały dla wszystkich stanów osiągalnych ze stanu *s*.

  Niepusty zbiór miejsc $P' \subseteq P$ jest pułapką, jeżeli każde przejście wyjściowe zbioru P' jest jednocześnie jego przejściem wejściowym, tj.: $Out(P') \subseteq In(P')$.
- ***Zatrzask*** (siphon) jest zbiorem miejsc, które jeżeli są puste dla pewnego stanu *s*, pozostają puste we wszystkich stanach osiągalnych ze stanu *s*.

  Niepusty zbiór miejsc $P' \subseteq P$ jest zatrzaskiem, jeżeli każde przejście wejściowe zbioru P' jest jednocześnie jego przejściem wyjściowym, tj. : $In(P') \subseteq Out(P')$
- Jednoelementową pułapkę lub zatrzask nazywamy ***ciasną pętlą***.

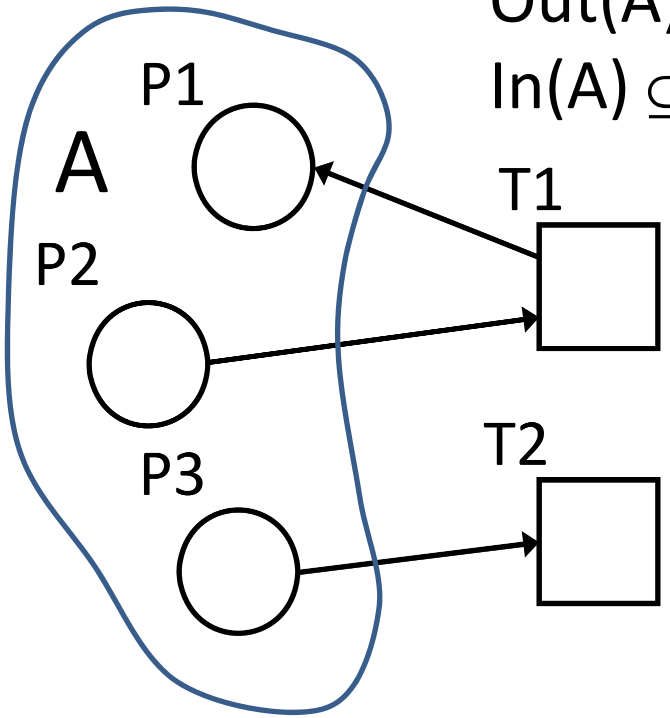
Pułapki i zatrzaski - przykład

- Który z podanych poniżej zbiorów miejsc jest pułapką, a który zatrzaskiem?

$In(A) = \{T1\}$

$Out(A) = \{T1, T2\}$

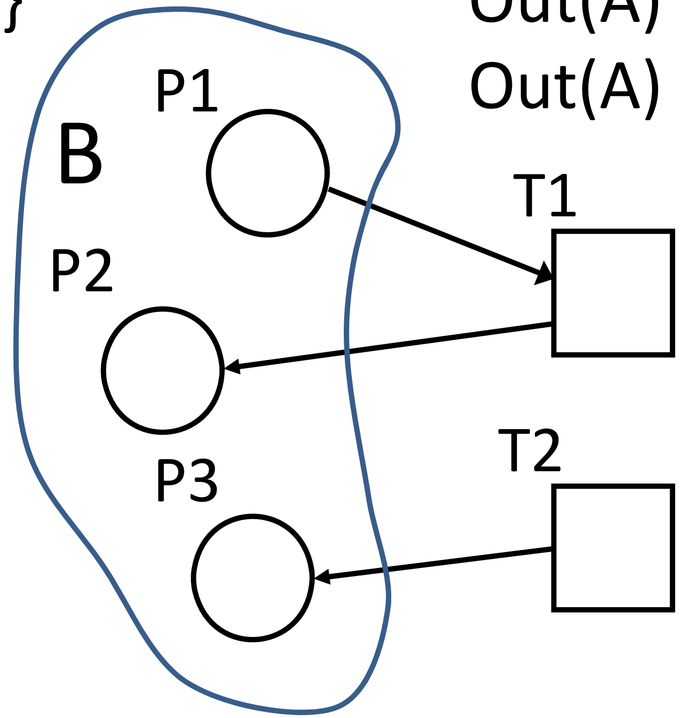
$In(A) \subseteq Out(A)$



$In(A) = \{T1, T2\}$

$Out(A) = \{T1\}$

$Out(A) \subseteq In(A)$



Własności pułapek i zatrzasków

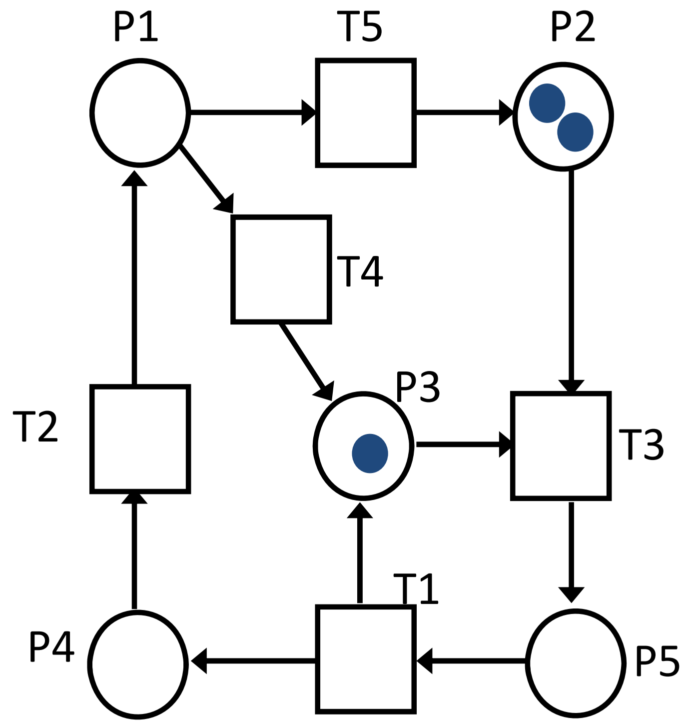
- Jeżeli zbiór P’ jest niepustą pułapką w stanie *s*, to pozostanie niepustą pułapką we wszystkich stanach osiągalnych z *s*.
- Jeżeli zbiór P’ jest pustym zatrzaskiem w stanie *s*, to pozostanie pustym zatrzaskiem we wszystkich stanach osiągalnych z *s*.
- Jeżeli zachodzi warunek In(P) $\subseteq$ Out(P) = T, to cała sieć stanowi zatrzask.
- Suma mnogościowa dwóch zatrzasków również jest zatrzaskiem.
- Suma mnogościowa dwóch pułapek również jest pułapką.

Wykrywanie minimalnego zatrzasku

1. Tworzymy zbiór kandydatów na zatrzaski w postaci: {p}, gdzie $p \in P$.
2. Jeżeli kandydat jest zatrzaskiem i nie jest nadzbiorem już znalezionych minimalnych zatrzasków, to dołączamy go do zbioru minimalnych zatrzasków.
   Jeżeli kandydat nie jest zatrzaskiem, to tworzymy nowych kandydatów dodając do niego ***jedno miejsce wejściowe, jednego przejść wejściowych, które nie jest jego przejściem wyjściowym***. Jeżeli uzyskany kandydat nie był jeszcze rozważany, to dodajemy go do zbioru kandydatów.
3. Po rozważeniu wszystkich kandydatów otrzymujemy zbiór minimalnych zatrzasków.

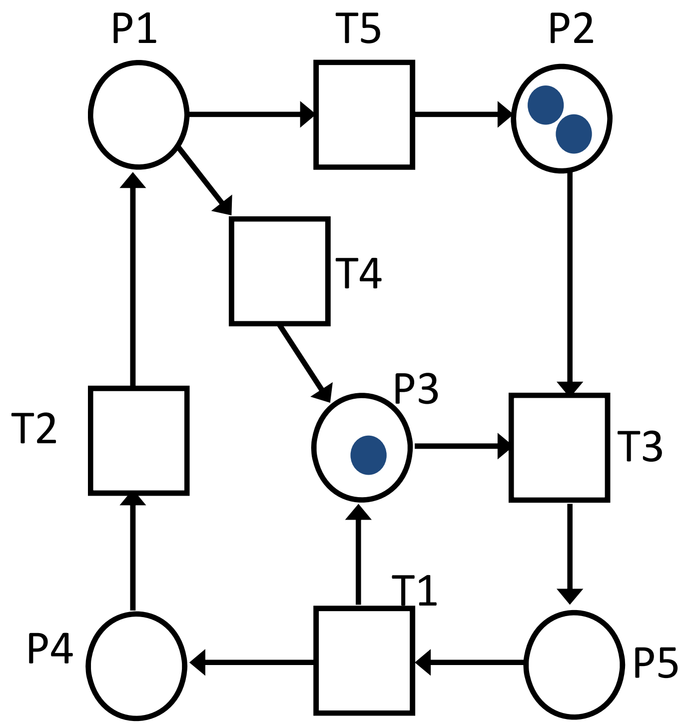
Wykrywanie minimalnego zatrzasku

1. Początkowa lista kandydatów: {p1}, {p2}, {p3}, {p4}, {p5}.
2. Dla zbioru {p1} mamy In({p1})={t2}, Out({p1})={t4, t5}, czyli: In({p1}) ≠ Out({p1}). Miejsce zbioru {p1} w zbiorze kandydatów zajmie więc zbiór {p1,p4} – p4 jest miejscem wejściowym przejścia t2; itd.
3. Nowa lista kandydatów: {p1,p4}, {p1,p2}, {p1,p3}, {p3,p5}, {p4,p5},{p2,p5}.
4. W kolejnej iteracji otrzymujemy listę: {p1,p4,p5}, {p1,p2,p4}, {p1,p3,p4}, {p1,p3,p5}, {p3,p4,p5}, {p2,p4,p5}, {p1,p2,p5}.



Wykrywanie minimalnego zatrzasku

5. Ostateczna lista minimalnych zatrzasków, to:
   P’={p1,p2,p4,p5} i P’’{p1,p3,p4,p5}.
   In(P’) = {t1,t2,t3,t5}
   Out(P’) = {t1,t2,t3,t4,t5}
   $In(P') \subseteq Out(P')$
   In(P’’) = {t1,t2,t4,t3}
   Out(P’’) = {t1,t2,t3,t4,t5}
   $In(P'') \subseteq Out(P'')$



Pułapki i zatrzaski

- Jeżeli w sieci Petriego N istnieje niezmiennik miejsc, to zbiór miejsc wyznaczony przez ten niezmiennik jest jednocześnie pułapką i zatrzaskiem.

Analiza własności sieci Petriego
Własności miejsc

Niech G będzie grafem osiągalności sieci Petriego N

- Miejsce p_i sieci N jest znakowane (zawiera co najmniej jeden żeton), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w grafie G węzeł, którego *i*-ta składowa jest większa od 0.
- Miejsce p_i sieci N jest bezpieczne wtedy i tylko wtedy, gdy *i*-ta składowa wszystkich węzłów grafu jest równa 0 lub 1.
- Miejsce p_i sieci N jest k-ograniczone ($k \in N$) wtedy i tylko wtedy, gdy *i*-ta składowa wszystkich węzłów grafu jest mniejsza lub równa k.

Analiza własności sieci Petriego
Własności przejść

Niech G będzie grafem osiągalności sieci Petriego N

- Przejście *t* jest martwe wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G nie ma krawędzi z etykietą *t*.
- Przejście *t* jest L1-żywotne wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G występuje krawędź z etykietą *t*.