Fale i Anteny – laboratorium Ćwiczenie I: Linia długa stratna		
Imię i nazwisko: Jarosław Gliwiński, Andrzej Bryja		Ocena:
Data ćwiczenia: 19.12.07	Data oddania sprawozdania: 09.01.08	

Polecenie

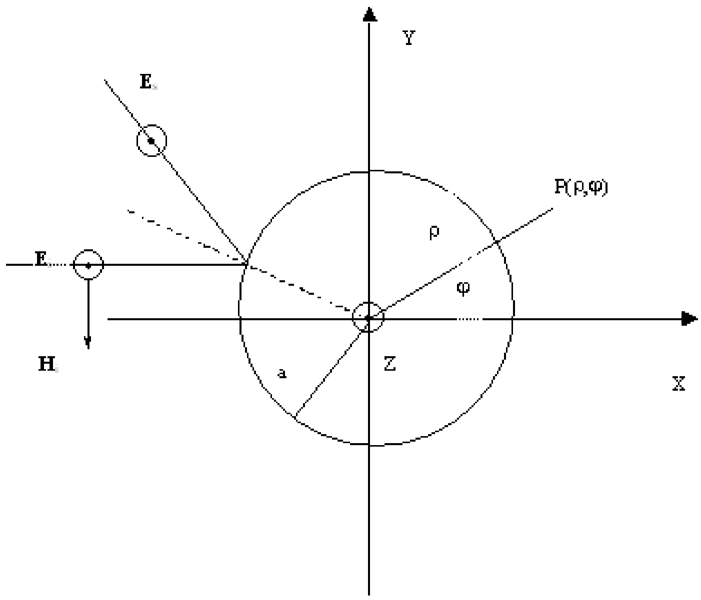
Fala płaska pada na nieskończenie długi walec przewodzący o promieniu „a" umieszczony w próżni (patrz rysunek). Wyznaczyć: pole elektryczne rozproszone, pole elektryczne całkowite, gęstość prądu na powierzchni walca

Dane początkowe do zadania, konieczne do dalszych obliczeń:

$a := 0.06$ [m]

$E_o := 10$ [V/m] $v_o := 3 \cdot 10^8$ [m/s]

$f := \frac{3.1 \cdot v_o}{2 \cdot \pi \cdot a}$ [Hz] $\mu_o := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]



Padająca fala płaska ma tylko składową z-ową o postaci:

$$E_{iz}(x,t) = E_o \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \beta_o \cdot x)} = E_o \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \beta_o \cdot x}$$

Gdzie v_0 – promień walca, f – częstotliwość fali.

Funkcję Hankela, niedostępna w Mathcad, wyrażamy przez funkcje J_n i Y_n:

$$H_{.2}(x,n) := \mathrm{if}\left[n \ge 0, Jn(n,x) - 1j \cdot Yn(n,x), (-1)^n \cdot (Jn(|n|,x) - 1j \cdot Yn(|n|,x))\right]$$

Funkcja Bessla dal n > 0 i n<0 (Mathcad ma tylko dla n>0):

$$J_{.n}(x,n) := \mathrm{if}\left[n \ge 0, Jn(n,x), (-1)^n \cdot Jn(|n|,x)\right]$$

Po podaniu założeń i danych zadania przechodzimy do realizacji poszczególnych podpunktów instrukcji. (na następnej stronie)

I. **Sporządzić wykres amplitudy i fazy gęstości prądu powierzchniowego w funkcji kąta ϕ**

W celu wykreślenia wykresów dotyczących gęstości prądu powierzchniowego należy oczywiście najpierw wyprowadzić w Mathcadzie wzory ich dotyczące. Zatem, co następuje:

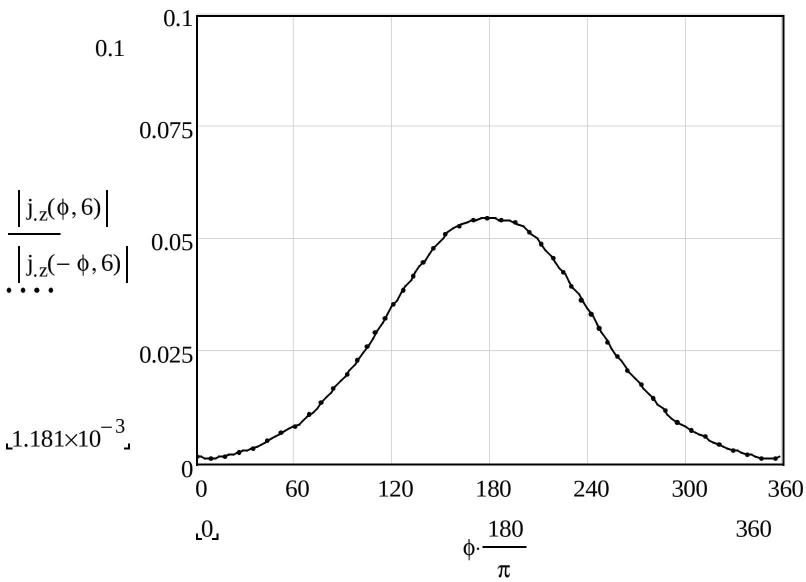
$\phi := 0, 0.05 .. 2\cdot\pi$ pełny kąt 360°

$\beta_{.o} := \frac{2\cdot\pi\cdot f}{v_{.o}}$ współczynnik propagacji

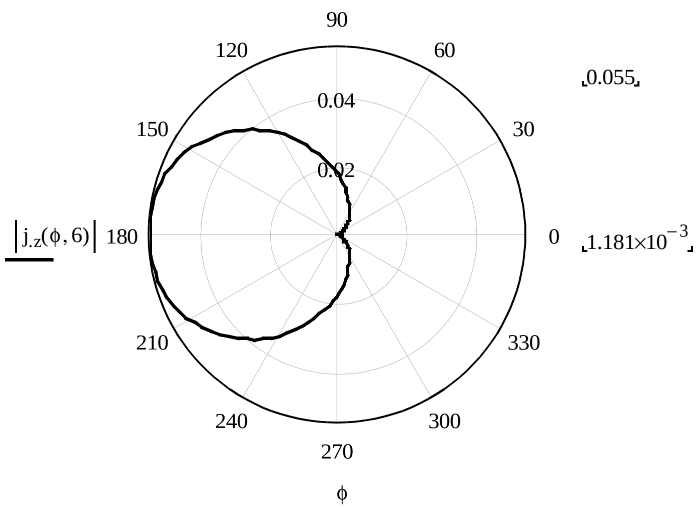
I wreszcie sam wzór na gęstość prądu:

$$j_{.z}(\phi, N) := \frac{2\cdot E_{.o}}{\pi\cdot a\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\mu_{.o}} \cdot \sum_{n=-N}^{N} \left[(-1i)^n \cdot \frac{e^{1in\cdot\phi}}{H_{.2}(\beta_{.o}\cdot a, n)} \right]$$

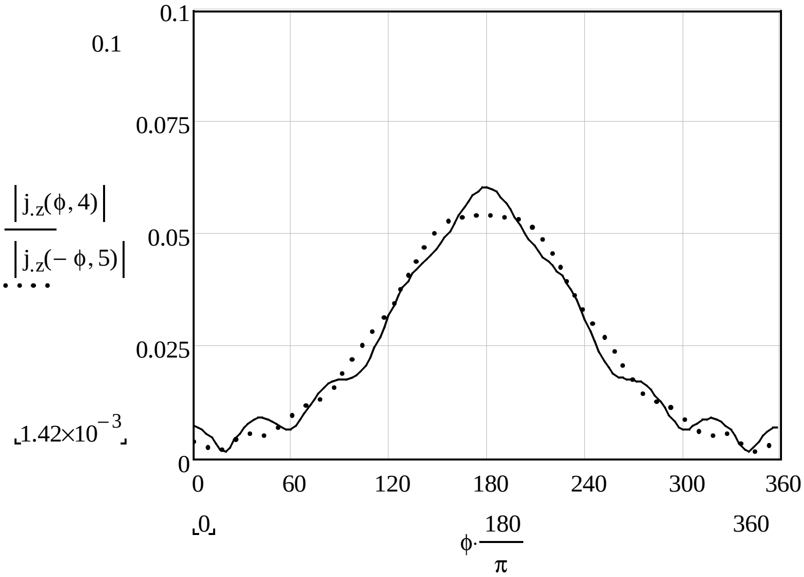
Funkcja jest ‘parzysta’, tj. dla parametrów ϕ i - ϕ oraz N i -N przyjmuje ten sam kształt symetryczny względem 180° (prostej ϕ = π).



Bardziej naturalną reprezentacją jest wykres we współrzędnych walcowych przedstawiony na przekroju walca. Teraz wyraźnie widać, że prąd jest największy tam, gdzie fala pada prostopadle.

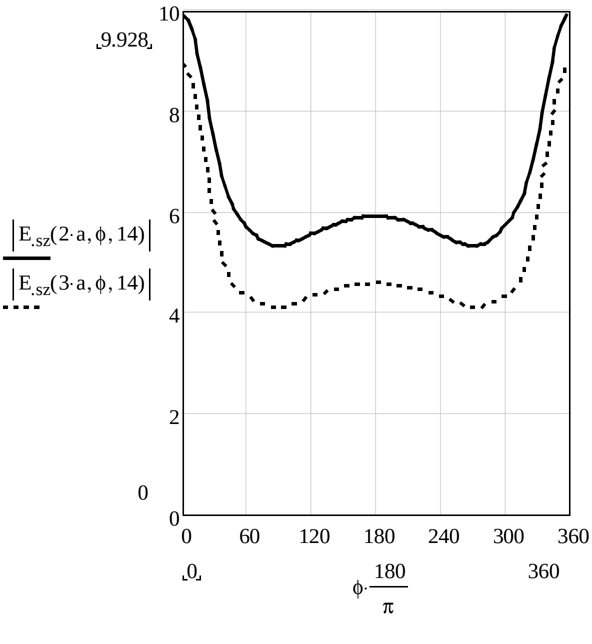


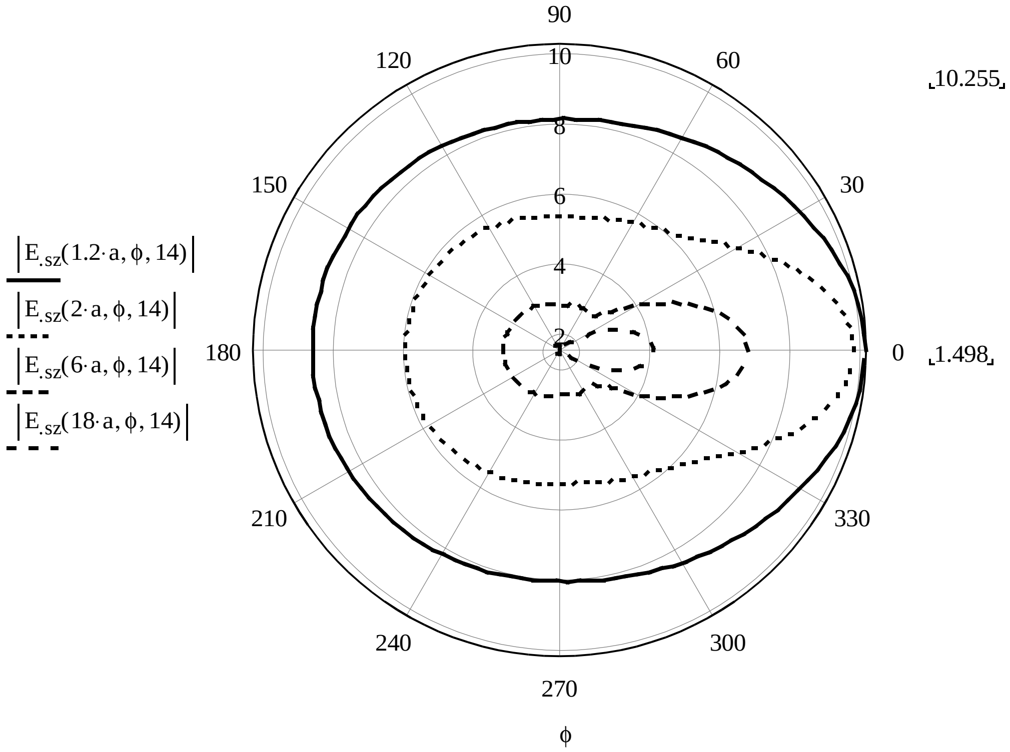
N=6 to minimalna wartość, dla której można uzyskać w pełni poprawny wynik. Na poniższym wykresie przedstawiono zależności dla N = 4 oraz 5 i o ile „5" jest niezłym przybliżeniem, to „4" już znacząco odbiega od prawidłowej krzywej.



II. **Wykres modułu pola elektrycznego rozproszonego – wsp. prostokątne i walcowe**

Pole rozproszone jest największe dla 0° i 180°.
W tym przypadku należy rozgraniczyć dwa obszary (na wykresie kołowym, na prostokątnym nazwalibyśmy je raczej „przedziałami").Pierwszy to półpłaszczyzna na lewo od prostej wyznaczanej przez średnicę 90°-270°, gdzie występuje fala padająca i odbita. Zgodnie z intuicyjną interpretacją, im większa odległość od środka walca „w lewo", tym pole odbite jest słabsze. Najsilniejsze jest dla ρ=a. W 180° krzyżuje się najwięcej odbitych fal.
W prawej półpłaszczyźnie obserwujemy natomiast falę po dyfrakcji o walec będący przedmiotem o rozmiarach porównywalnych z długością fali (nie uwzględniając rzecz jasna nieskończonej długości, a skończoną średnicę).
Oczywiście dla całej płaszczyzny prawdziwe jest stwierdzenie, że im dalej od walca, tym pole rozproszone jest słabsze.





III. **Pole całkowite we współrzędnych prostokątnych**

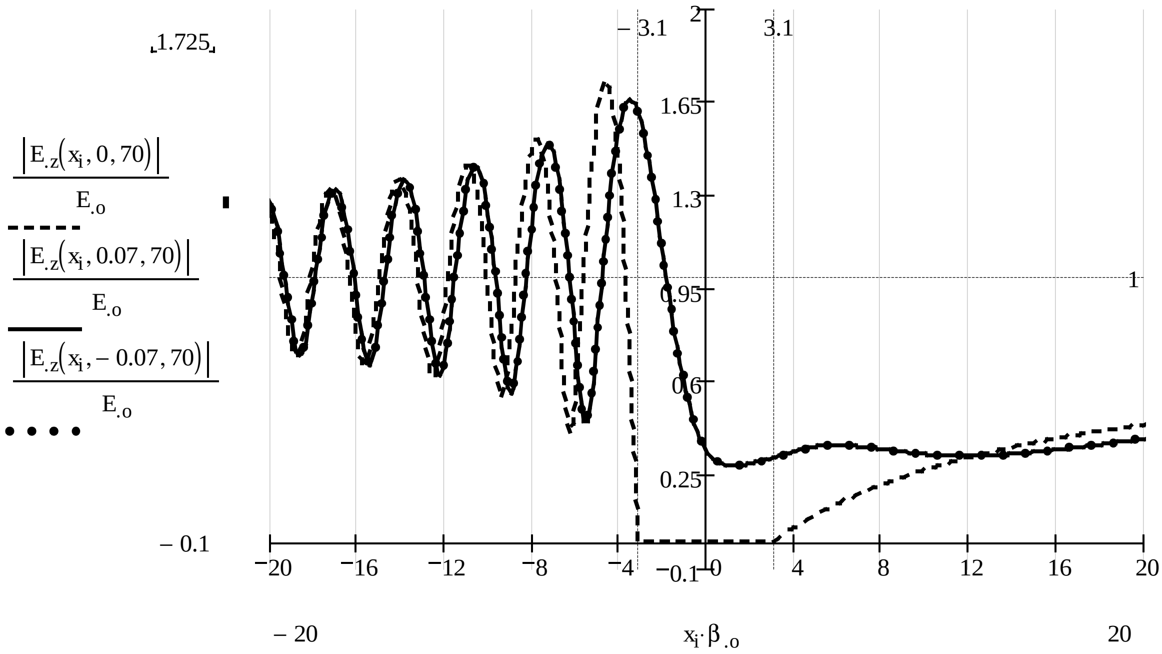
$$E_z(x,y,N) := \mathrm{if}\left[\sqrt{x^2+y^2} \le a, 0, E_c \cdot \sum_{n=-N}^{N} \left[(-i)^n \cdot \left(J_n\left(\beta_o \cdot \sqrt{x^2+y^2}, n\right) - \frac{J_n(\beta_o \cdot a, n)}{H_2(\beta_o \cdot a, n)} \cdot H_2\left(\beta_o \cdot \sqrt{x^2+y^2}, n\right)\right) \cdot e^{i \cdot n \cdot \mathrm{angle}(x,y)}\right]\right]$$

$i := 0..400$ $\quad$ $j := 0..400$ $\quad$ $\Delta x := 0.0025$ $\quad$ $\Delta y := 0.0025$ [m]

$x_i := -0.4 + i \cdot \Delta x$ $\quad$ $y_j := -0.4 + j \cdot \Delta y$ $\quad$ $y_{40} = -0.3$ $\quad$ $\beta_o \cdot y_{400} = 31$ $\quad$ $\beta_o \cdot a = 3.1$

Dane w instrukcji konwersje współrzędnych prostokątnych na walcowe zostały wcielone do wzoru na pole całkowite. Pozostałe wartości to czyste dane z instrukcji.

Na wykresie przedstawiono pole całkowite w dwóch płaszczyznach: zawierajacej oś walca (y=0) oraz przechodzące tuż obok (y=0,7, czyli o 0,1 od ściany walca).
W pierwszym przypadku powstaje fala o amplitudzie rosnącej wraz ze zbliżaniem się do powierzchni walca (o zwiększaniu amplitudy w tym przypadku już wspomniano – suma pole całkowitego i rozproszonego jest większa). Wewnątrz idealnie walca pola oczywiście nie ma – pole elektryczne wewnątrz przewodnika nie występuje (stąd obszar zerowego pola między znacznikami), natomiast pole za walcem jest efektem ugięcia fali.
Wykres dla y=0,7 nie ukazuje wnętrza walca a jedynie jego bliskie sąsiedztwo, dzięki czemu można zaobserwować także obszar przejściowy pomiędzy dominacją odbicia a ugięcia.
W związku z tym, że padające pole jest symetryczne, symetrię wykazuje oczywiście również pole po obu stronach walca.(y=0,07 oraz y=-0,07). Wykres na następnej stronie.



IV. Odpowiedzi na dodatkowe pytania, których nie zawarto w sprawozdaniu:

1) Użycie równań Maxwella i WB:
Do uzyskania gęstości prądu używamy wzoru uzależniającego ją od *H*. Z kolei *H* uzyskujemy stosując następujące przekształcenie (wynikające z 1. równania Maxwella dla wymuszenia harmonicznego w stanie ustalonym:

$$\vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E}$$

do jego wykonania potrzebne jest rzecz jasna pole całkowite *E*, kóre uzyskujemy dzięki zastosowaniu warunku brzegowego dla powierzchni walca:

$$E_z(a,\phi) = E_z^i(a,\phi) + E_z^r(a,\phi) = 0$$

(z kolei by uzyskać pole odbite E^r używamy równania falowego)

2) Postać wyznacznika używanego w rotacji dla współrzędnych walcowych:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{1}_\rho}{\rho} & \mathbf{1}_\phi & \frac{\mathbf{1}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & \phi\rho & z \end{vmatrix}$$